

استادبانک



نمونه سوالات همراه با جواب و
گام به گام کتاب‌های درسی
به طور کامل رایگان در
اپلیکیشن استادبانک

به جمع دهها هزار کاربر اپلیکیشن رایگان استادبانک بپیوندید.

لینک دریافت اپلیکیشن نمونه سوالات استادبانک (کلیک کنید)

* برای مشاهده نمونه سوالات دانلود شده به صفحه بعد مراجعه کنید.

مجموعه سوالات استادبانک

۱- به کمک نتیجه‌ی تمرین ۹، حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.

$$BC = 9, AC = 6, AB = 10 \quad \text{الف)$$

$$BC = 9, AC = 4, AB = 8 \quad \text{ب)$$

$$BC = 17, AC = 15, AB = 8 \quad \text{پ)}$$

پاسخ »

الف) $a = 9, b = 6, c = 10$

$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 126 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

ب) $a = 9, b = 4, c = 8$

$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 80 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

پ) $a = 17, b = 15, c = 8$

$$a^2 = 289, b^2 + c^2 = 289 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

۲- به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

$$a^2 > b^2 > c^2 \quad \hat{A} = 90^\circ \quad \text{اگر و تنها اگر}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \quad \hat{A} < 90^\circ \quad \text{اگر و تنها اگر}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \hat{A} = 90^\circ \quad \text{اگر و تنها اگر}$$

پاسخ »

الف) $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightleftharpoons[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A > 0$

$$\xleftarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

ب) $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightleftharpoons[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A < 0$

$$\xleftarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

پ) $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightleftharpoons[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A = 0$

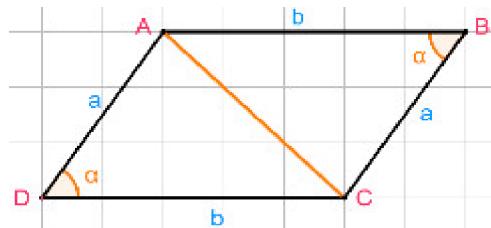
$$\xleftarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

مجموعه سوالات استادبانک

۳- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

» **پاسخ** »

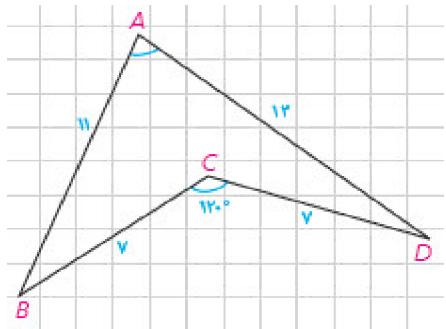
با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = a \cdot b \sin\alpha$$

- ۴- در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.



پاسخ

مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام 30° خواهد بود.

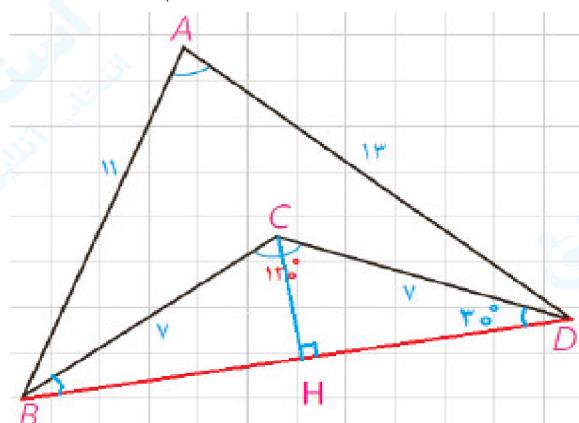
$CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ در نتیجه:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times BD = \frac{\sqrt{3}}{4} BD \quad \left. \begin{array}{l} \\ S_{BCD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 49$$

$$P_{ABD} = \frac{11 + 13 + \sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{\sqrt{3}}{2})(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3})(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 11)(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 13)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{\sqrt{3}}{2})(12 - \frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{(144 - \frac{144}{4})(\frac{144}{4} - 1)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

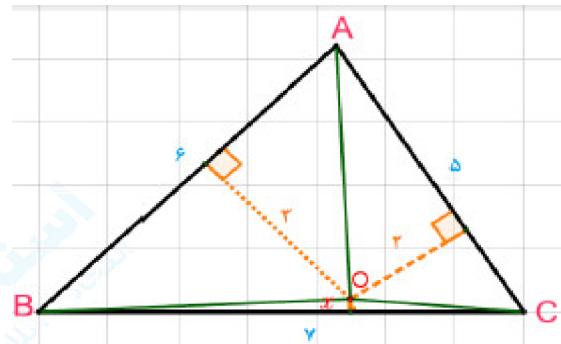
$$\frac{(1), (2)}{} \rightarrow \frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$

۵- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟ راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

پاسخ



$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.72$$

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

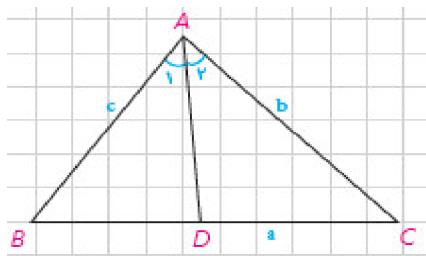
$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S_{ABC} = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

۶- در شکل زیر AD نیمساز زاویه \hat{A} است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} \\ &\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} \Rightarrow AD = \dots$$

$$\Rightarrow (A \text{ نیمساز راس}) d_a = \frac{\frac{1}{2} bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

پاسخ »

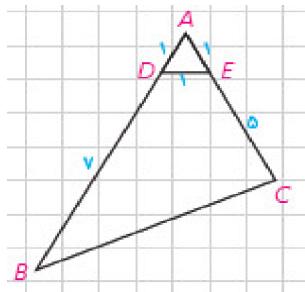
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

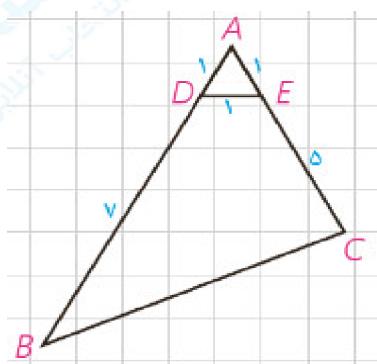
$$= \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (A \text{ نیمساز راس}) d_a = \frac{\frac{1}{2} bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

۷- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.



پاسخ »

با توجه به این که مثلث ADE متساویالساقین است پس $\widehat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه:



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

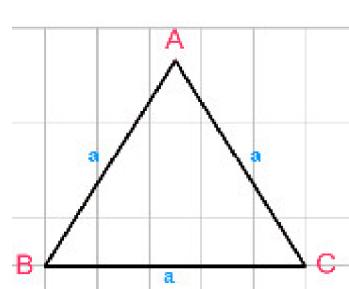
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۸- دستور محاسبه مساحت مثلث متساویالاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

پاسخ »

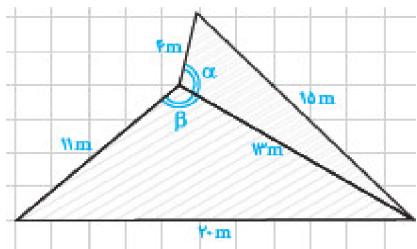


$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{3a}{2} - a \right)^2} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2} \right)^2}$$

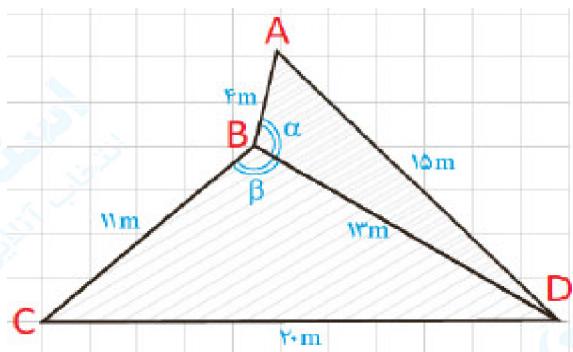
$$= \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

مجموعه سوالات استادبانک



-۹- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه قدر می‌شود؟ نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. ($\alpha = \beta$)

» پاسخ «



$$S_{ABD} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \text{ m}^2$$

$$S_{BCD} = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCD} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

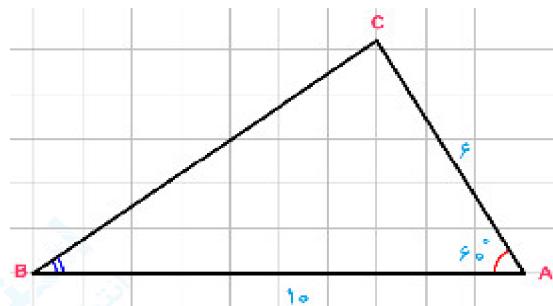
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \beta \Rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

۱۰- در مثلث ABC، $\hat{A} = 60^\circ$ ، $AB = 10$ ، $AC = 6$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

» پاسخ «



$$\text{الف) } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

$$\text{پ) } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$

مجموعه سوالات استادبانک

۱۱- با پر کردن جاهای خالی با فرض این که در شکل مقابل نیمساز زاویه \hat{A} است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:
 الف) $DH = DH'$ چرا

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times \dots}{\frac{1}{2}DH \times \dots} = \dots \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times \dots}{\frac{1}{2}CD \times \dots} = \dots \quad (2) \quad (b)$$

$$\dots = \dots \\ \dots \quad \dots$$

از مقایسه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

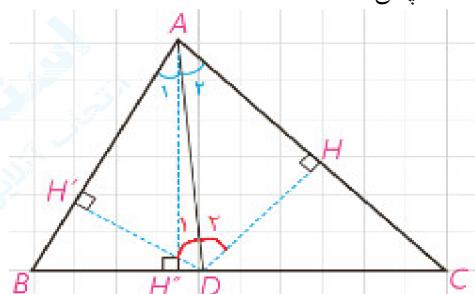
«با سخ»

الف) راه اول:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{D}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{D}_1 = \hat{D}_2} \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \\ \hat{D}_1 &= \hat{D}_2 \\ AD &= AD \\ \rightarrow DH &= DH' \end{aligned}$$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AH''}{\frac{1}{2}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2) \quad (b)$$

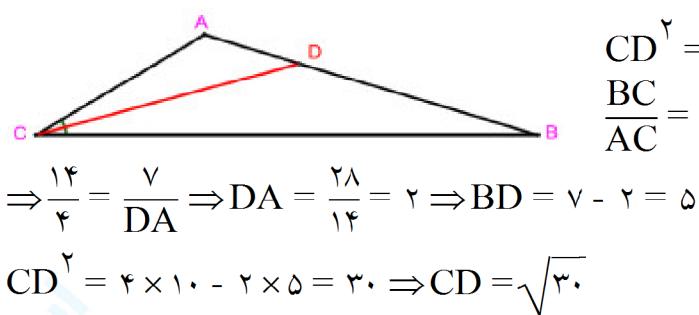
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AB}{\frac{1}{2}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

الف) راه اول:

از مقایسه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۱۲- در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.

پاسخ »



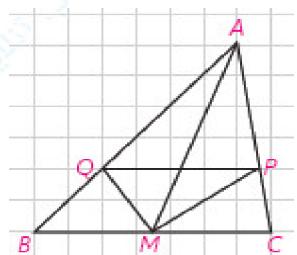
$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BC$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10+4}{4} = \frac{BD+DA}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{7}{DA} \Rightarrow DA = \frac{28}{14} = 2 \Rightarrow BD = 10 - 2 = 8$$

$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 8 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۱۳- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای $\angle AMB$ و $\angle AMC$ هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



پاسخ »

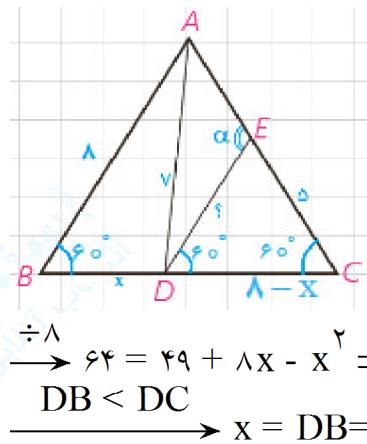
در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\angle AMB$ و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه $\angle AMC$ است.
پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \quad MB = MC \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عكس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۱۴- در مثلث متساویالاضلاع ABC به ضلع λ واحد، نقطه‌ی D ، که به فاصله‌ی γ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ ($CD > BD$ ؟) به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

» **پاسخ**



$$AB = AC = BC = \lambda, AD = \gamma, DB = x$$

$$DC = x - \gamma, DB < DC$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

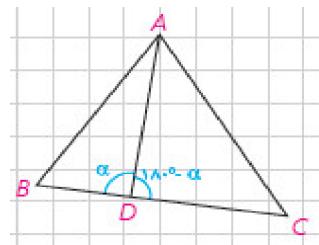
$$\Rightarrow 64(\lambda - x) + 64x = 49 \times \lambda + \lambda x(\lambda - x)$$

$$\Rightarrow 64 \times \lambda - 64x + 64x = 49 \times \lambda + \lambda x(\lambda - x)$$

$$\frac{\div \lambda}{\rightarrow 64 = 49 + \lambda x - x^2} \Rightarrow x^2 - \lambda x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 5$$

$$DB < DC$$

$$\rightarrow x = DB = 3, DC = 5$$



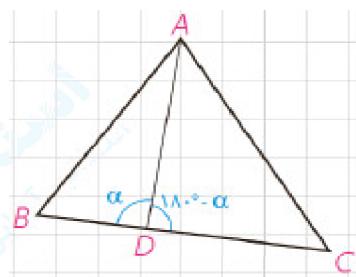
۱۵- در مثلث ABC ، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB$$

$$= AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه‌ی استوارت})$$

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

» **پاسخ**



$$\triangle ABD : AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos\alpha \xrightarrow{\times DC}$$

$$AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos\alpha \quad (1)$$

$$\triangle ACD : AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) + (2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - \cancel{2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos\alpha}$$

$$+ DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + \cancel{2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\alpha} \Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB$$

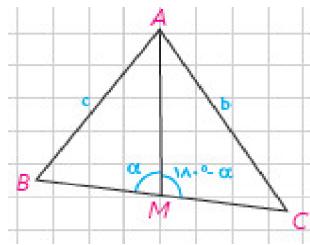
$$= AD^2 \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD \cdot DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$DC = DB = \frac{a}{2}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times c^2 + \frac{a}{2} \times b^2 = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a \Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2} \left(2AD^2 + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

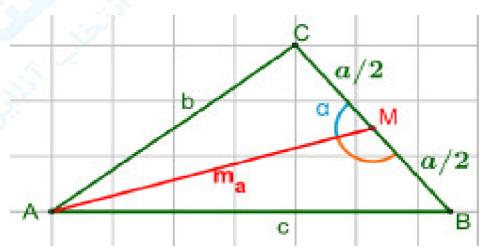


۱۶- در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{2} \right)$. با نوشتند قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC و $b^2 + c^2$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{4} \quad (\text{قضیه‌ی میانه‌ها})$$

در حالت خاص $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

پاسخ



$$\triangle ACM: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times m_a \times \cos\alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos\alpha \quad (1)$$

$$\triangle ABM: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{c}{2} \times m_a \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos\alpha \quad (2)$$

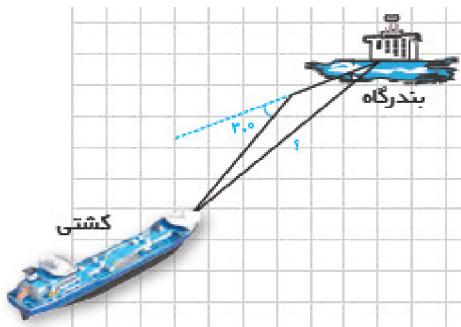
$$\frac{(1) + (2)}{} \rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos\alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

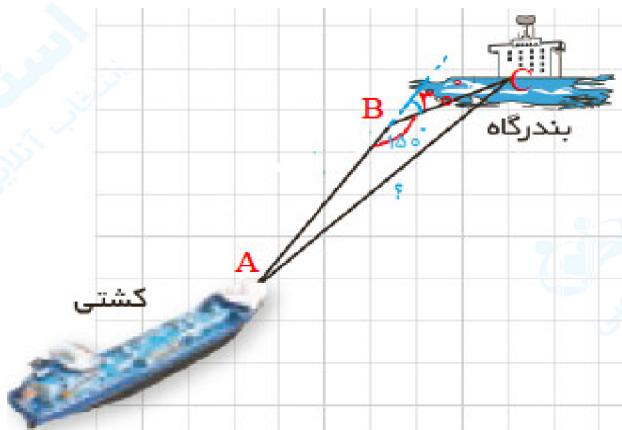
$$AB = c = 4, \quad AC = b = 6, \quad BC = a = 8$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM \Rightarrow AM = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(36 + 16) - 64}{4} \Rightarrow AM = 10$$

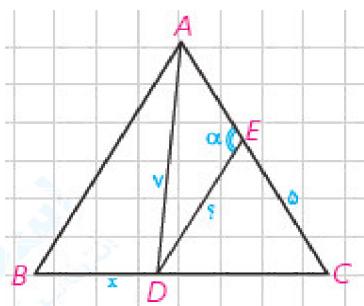
مجموعه سوالات استادبانک



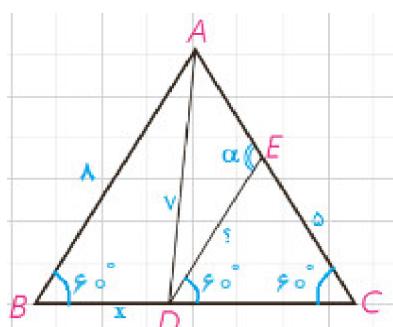
۱۷- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



$$\begin{aligned} AB &= 60 \times 1 = 60 \text{ km}, BC = 40 \times 0.5 = 20 \text{ km} \\ AC^2 &= 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos 150^\circ \\ &= 3600 + 400 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Rightarrow AC^2 &= 4000 + 1200\sqrt{3} = 400(10 + 3\sqrt{3}) \\ \Rightarrow AC &= 20\sqrt{10 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$



۱۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع A واحد، نقطه‌ی D ، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ ($CD > BD$) نقطه‌ی E ، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟

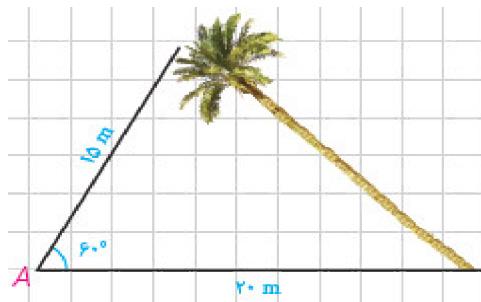


$DC = CE = 5$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه 60° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $DE = 5$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:
 $\alpha = 60^\circ + 60^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

پاسخ

$$\begin{aligned} 7^2 &= x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \sin 60^\circ \Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 8x \\ \Rightarrow x^2 - 8x + 15 &= 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 3 \\ \text{BD} < DC &\rightarrow BD = 3, DC = 5 \end{aligned}$$

مجموعه سوالات استادبانک



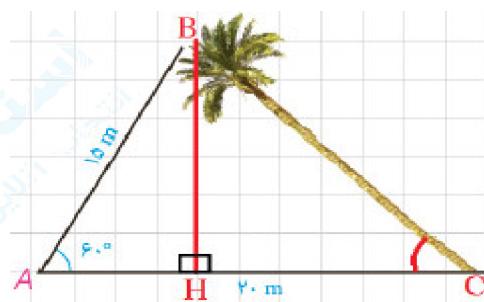
۱۹- یک درخت کج از نقطه‌ی A روی زمین، که در فاصله‌ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه‌ی 60° دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصله‌ی نوک درخت از زمین

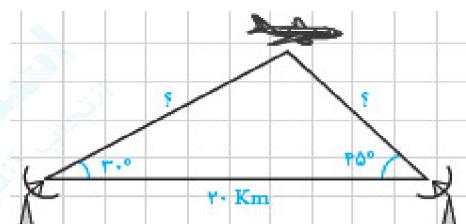
پاسخ »



$$\text{الف) } a^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60^\circ \\ 400 + 225 - 300 \Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13}$$

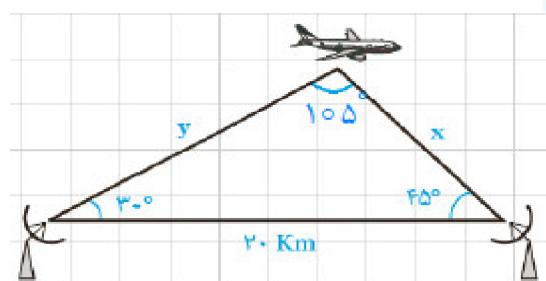
$$\text{ب) } \frac{5\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0.72 \Rightarrow \hat{C} \approx 46^\circ$$

$$\text{ب) } \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



۲۰- دو ایستگاه رادار، که در فاصله‌ی ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند. فاصله‌ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.

پاسخ »



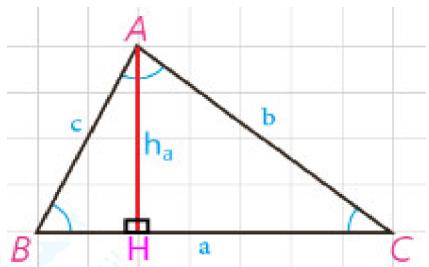
$$\frac{20}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{0.96} = \frac{x}{0.5} \Rightarrow x \approx 10/416 \\ \frac{20}{0.96} = \frac{y}{0.707} \Rightarrow y \approx 14/72 \end{cases}$$

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

۲۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه $\widehat{A} = 90^\circ$ با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

پاسخ



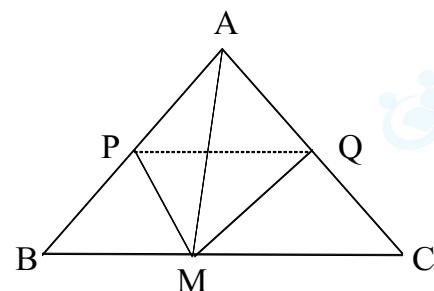
$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{2}bc \\ S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \end{array} \right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 h_a^2$$

$$\Rightarrow b^2 c^2 = (b^2 + c^2) h_a^2 \Rightarrow b^2 c^2 = b^2 h_a^2 + c^2 h_a^2 \xrightarrow{\div b^2 c^2 h_a^2} \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2 h_a^2} = \frac{b^2 h_a^2}{b^2 c^2 h_a^2} + \frac{c^2 h_a^2}{b^2 c^2 h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۲۲- در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه \widehat{AMC} و \widehat{AMB} را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QC} \quad (0/25) \\ \widehat{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PB} \quad (0/25) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB} \xrightarrow{\text{PQ} \parallel BC} PQ \parallel BC \quad (0/25)$$



مجموعه سوالات استادبانک

-۲۳- اندازه‌ی سه ضلع مثلثی $AB = 16$ و $AC = 22$ و $BC = 19$ ، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز درونی زاویه‌ی \hat{A} بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.

»پاسخ«

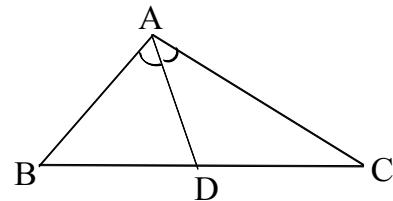
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

نیمساز زاویه \hat{A} ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC + BD} = \frac{AB}{AC + AB} \rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{19} = \frac{16}{38} \Rightarrow BD = 8$$

$$\Rightarrow DC = 19 - 8 = 11$$



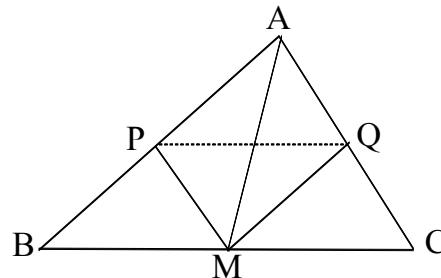
-۲۴- در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه \hat{AMC} و \hat{AMB} را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازی‌اند.

»پاسخ«

$$\Delta AMC \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QC} \quad (0/25)$$

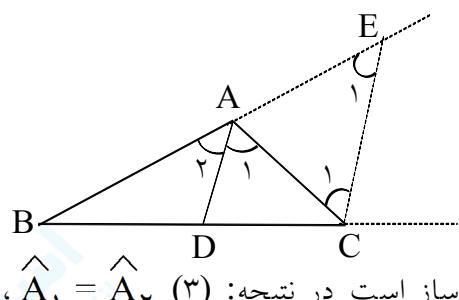
$$\frac{MC = MB}{\Delta AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB} \xrightarrow[\text{عكس قضیه تالس}]{(0/25)} PQ \parallel BC \quad (0/25)$$

$$\Delta AMB \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PB} \quad (0/25)$$



-۲۵- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلي، ضلع رویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند.

پاسخ »



$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (۳)

نیمساز است در نتیجه:

$\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (۴)

$\hat{A}_2 = \hat{E}_2$ (۵)

از طرفی طبق فرض مسئله،

AD نیمساز AEC است.

حال از رابطه های (۱)، (۲) و (۳) می توان نتیجه گرفت:

$\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (۶)

در مثلث BEC ، پس طبق قضیه تالس داریم:

$AE = AC$ (۷)

با توجه به رابطه (۴) اگر در رابطه (۵) بجای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم،

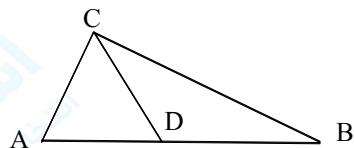
خواهیم داشت:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (۸)

که حکم ثابت می شود.

-۲۶- سه ضلع مثلثی $AB = ۴$ ، $BC = ۶$ و $AC = ۵$ سانتی متر می باشد. اندازه هی پاره خط هایی را که نیمساز داخلي زاویه C بر ضلع AB ایجاد می کند تعیین کنید.

پاسخ »



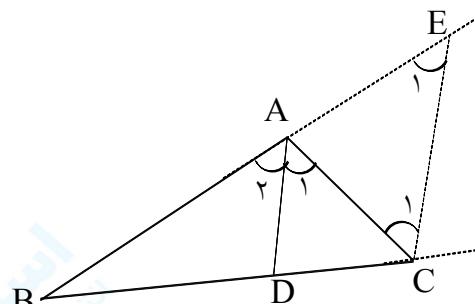
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \quad (۹) \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{4}{4+6} \quad (۱۰)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow AD = 2 \quad (۱۱)$$

$$\Rightarrow BD = AB - AD = 3 \quad (۱۲)$$

-۲۷- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

پاسخ »



فرض: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ نیمساز زاویهٔ داخلی A، حکم:

برهان: ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویهٔ A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel CE \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \\ AD \parallel CE \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{E}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$$

فرض $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و

$$B \overset{\triangle}{\underset{\text{قضیه تالس}}{\underset{E}{\parallel}} C : AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

از طرفی:

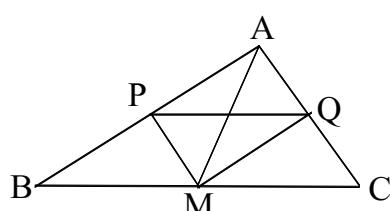
با توجه به رابطهٔ (1) اگر در رابطهٔ (2) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

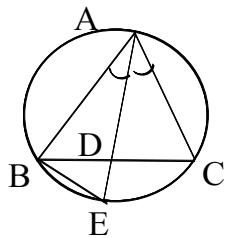
-۲۸- در مثلث ABC میانهٔ AM و نیمسازهای دو زاویهٔ \widehat{AMB} و \widehat{AMC} را رسم می‌کنیم، این دو نیمساز اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط P و O قطع می‌کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.

پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \text{نیمساز } \widehat{AMB} \text{ در مثلث } AMB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MA} \\ \text{نیمساز } \widehat{AMC} \text{ در مثلث } AMC \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \\ \text{میانه } AM \Rightarrow MC = MB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عكس}} PQ \parallel BC$$



-۲۹- در شکل زیر AD^{\prime} نیمساز زاویه \widehat{BAC} است. ثابت کنید $AD^{\prime} = AB \cdot AC - BD \cdot DC$



پاسخ »

نقشه D محل برخورد دو وتر AE و BC در داخل دایره است. پس:

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC$$

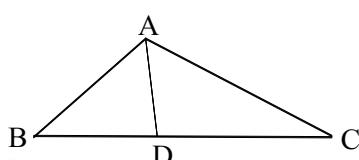
از طرفی $DE = AE - AD$ پس:

$$AD(AE - AD) = BD \cdot DC \Rightarrow AD^{\prime} = AD \cdot AE - BD \cdot DC \quad (1)$$

از طرفی در دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle ABE$ داریم:

$$\left(\widehat{E_1} = \frac{AB}{2} = \widehat{C_1} \text{ و } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \right) \Rightarrow \widehat{ADC} \sim \widehat{ABE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AD^{\prime} = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

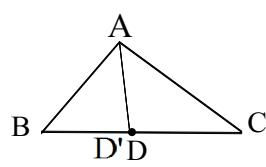


-۳۰- اگر در مثلث ABC نقطه D روی BC طوری انتخاب شود که $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ باشد. آنگاه؛ ثابت کنید: AD نیمساز زاویه \widehat{A} می‌باشد.

پاسخ »

راه حل: این مسئله را از راه برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم: AD نیمساز \widehat{A} نباشد بلکه AD' نیمساز زاویه \widehat{A} باشد داریم.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\substack{\text{ترکیب} \\ \text{در مخرج}}} \frac{BD'}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \\ \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\substack{\text{ترکیب} \\ \text{در مخرج}}} \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

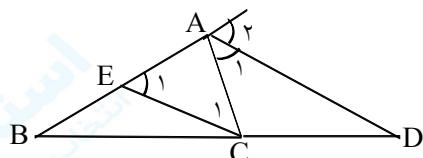
$$\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD' = BD \quad (I)$$

ولی رابطه (I) نمی‌تواند، برقرار باشد. مگر، آنکه نقاط D و D' بر هم منطبق باشند، پس AD نیمساز زاویه \widehat{A} است.

-۳۱- ثابت کنید: نیمساز هر زاویه‌ی بیرونی از یک مثلث بر امتداد ضلع مقابل دو پاره خط پدید می‌آورد، که نظیر به نظیر با دو ضلع دیگر مثلث متناسبند.

پاسخ »

راه حل: فرض کنیم نیمساز خارجی زاویه‌ی \hat{A} امتداد ضلع مقابل را در نقطه‌ی D قطع کند، از زأس C خطی موازی نیمساز AD را در E در قطع کند.



$$CE \parallel AD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel EC \\ AC \text{ مورب} \\ AB \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 = \hat{E}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

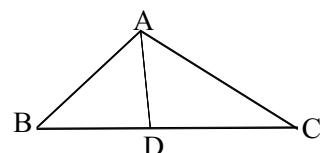
$$\hat{C}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow AE = AC \xrightarrow{\text{از (I)}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

-۳۲- محیط مثلثی ۴۳ سانتی‌متر و اندازه‌های پاره‌خط‌هایی که نیمساز یک زاویه درونی آن بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد. به ترتیب $7/2$ و $10/8$ سانتی‌مترند. سه ضلع مثلث را حساب کنید.

پاسخ »

راه حل: فرض می‌کنیم AD نیمساز بوده و $BD = 7/2$ و $CD = 10/8$ باشد.
 $BC = 18 \Rightarrow AB + AC = 25$

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[\text{خرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow \frac{7/2}{18} = \frac{AB}{25} \Rightarrow$$

$$AB = 10 \Rightarrow AC = 15$$


-۳۳- اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم، $AC > AB$ و AD نیمساز باشد، ثابت کنید: $DC > BD$.

پاسخ »

راه حل: با توجه به قضیه‌ی نیمسازها داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ نیمساز} \\ \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow BD > DC$$

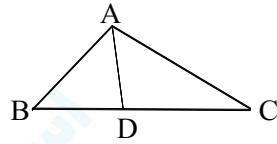
$$\left. \begin{array}{l} AB > AC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

۳۴- اگر در مثلث \widehat{ABC} نیمساز زاویه \widehat{A} ضلع BC را در D قطع کند، آنگاه؛ ثابت کنید:

$$BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC}, DC = \frac{BC \times AC}{AB + AC}$$

» پاسخ «

راه حل: با توجه به قضیه نیمسازها داریم:

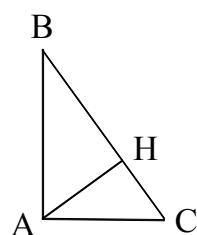


$$\text{ترکیب در نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{خرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow \\ \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC}$$

به همین ترتیب رابطه دوم را می‌توان ثابت کرد.

۳۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ارتفاع وارد بر وتر AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

» پاسخ «



$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{array} \right\} \div \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow AB^2 \cdot CH = AC^2 \cdot BH$$

۳۶- در هر مثلث قائم‌الزاویه $(A=90^\circ)ABC$ اگر P نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث باشد ثابت کنید:
 $S = P(P - a)$ یا $S = (P - b)(P - c)$

» پاسخ «

$$p(p - a) = \frac{a + b + c}{2} \left(\frac{a + b + c}{2} - a \right) = \frac{1}{2} bc = S$$

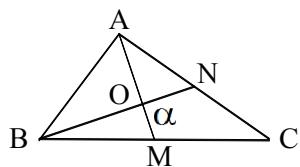
و تر این مثلث قائم‌الزاویه است. داریم:

به همین ترتیب حکم دوم را می‌توان ثابت کرد.

$$S = \frac{1}{3} M_a \cdot M_b \cdot \sin \alpha$$

-۳۷- اگر در مثلثی m_a و m_b میانه و α زاویه بین آنها باشد ثابت کنید:

پاسخ »



اگر AM و BN میانه‌های مثلث ABC باشند مساحت مثلث AON برابر $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.

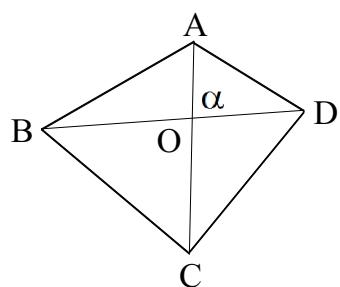
$$S_{ABC} = 6 \left(\frac{1}{2} OA \cdot ON \cdot \sin \alpha \right)$$

$$S_{ABC} = 3 \left(\frac{1}{3} AM \cdot \frac{1}{3} BN \cdot \sin \alpha \right)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{3} AM \cdot BN \cdot \sin \alpha$$

-۳۸- ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنها.

پاسخ »



فرض کنیم O محل برخورد قطرهای چهارضلعی باشد و α زاویه‌ی بین دو قطر باشد. داریم:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOD}$$

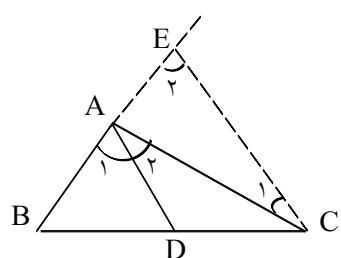
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \alpha +$$

$$\frac{1}{2} OD \cdot OC \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

-۳۹- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

پاسخ »



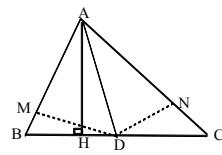
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{حکم:}$$

از رأس C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در E قطع کند. داریم:

$$AD \parallel CE \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{E}_2 \text{ و } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow AE = AC \quad (1)$$

$$AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

-۴۰- در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.



الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید.
و DN چه رابطه‌ای با DM دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ »

$$\text{(الف)} \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times DC} = \frac{BD}{DC}$$

مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است. (ب)

$$\text{(پ)} \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}DM \times AB}{\frac{1}{2}DN \times AC} = \frac{AB}{AC}$$

از مقایسه‌ی رابطه الف و پ $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

-۴۱- سه ضلع مثلثی 8 ، 12 ، 15 سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پیدید می‌آورد، را تعیین کنید.

پاسخ »

فرض کنید $AB = 8$ و $AC = 12$ و $BC = 15$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

$$\text{نیمساز } \Delta AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{8}{12} \xrightarrow{\substack{\text{ترکیب} \\ \text{در مخرج}}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{8}{8+12} \Rightarrow \frac{BD}{15} = \frac{8}{20} \Rightarrow BD = 6$$

$$DC = BC - BD \quad DC = 15 - 6 = 9$$

