

اداره گل آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختیاری (http://chb.medu.ir)	اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ شهرکرد	تاریخ آزمون:	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
آزمون درس: ریاضیات گسسته	رشته تحصیلی: ریاضی و فیزیک	نوبت آزمون: دی ماه	تعداد صفحات: ۲
پایه تحصیلی: دوازدهم	نام آموزشگاه:	ساعت آزمون:	تعداد پرسش ها: ۱۷
نام و نام خانوادگی:	نام کلاس:	نام دبیر:	طراح: علی روزدار

شماره	پرسش ها	بارم
۱	ابتدا درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را مشخص کرده، سپس برای گزاره ی نادرست یک مثال نقض و برای گزاره ی درست یک اثبات ارائه دهید. الف) برای هر عدد طبیعی n عدد $2^n + 2n - 1$ اول است. ب) اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.	۱/۷۵
۲	فرض کنید a_1 و a_2 و a_3 سه عدد صحیح، و b_1 و b_2 و b_3 همان سه عدد، ولی با ترتیبی دیگر باشند. به کمک برهان خلف ثابت کنید $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ عددی زوج است.	۱/۲۵
۳	نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b داریم: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$	۱/۵
۴	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. الف) باقیمانده ی تقسیم عدد 1397887562 بر 11 برابر است. ب) با تقسیم طرفین معادله ی $(\text{بیمانه } 9) 42x \equiv 18$ بر 6 ، معادله ی بدست می آید. ج) گراف کامل K_5 دارای رأس و یال است.	۱
۵	گزینه ی درست را انتخاب کنید. الف) اگر عدد غیر صفر a و عدد b اعداد صحیح باشند، کدام مورد از عبارت $a b$ نتیجه نمی شود. (۱) $a mb$ ، $m \in Z$ (۲) $ma b$ ، $m \in Z$ (۳) $ a \leq b $ (۴) $\exists q \in Z ; b = aq$ ب) اگر باقیمانده ی تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد 5 و 6 به ترتیب 3 و 1 باشد، باقیمانده ی تقسیم بر برابر کدام است؟ (۱) 13 (۲) 8 (۳) 17 (۴) 4 ج) اگر m عدد صحیح غیر صفر باشد، حاصل $(m^2 \cdot [m \cdot m^3])$ برابر کدام است؟ (۱) m (۲) $ m $ (۳) m^2 (۴) $ m^3 $ د) کدام معادله ی همبستگی دارای جواب نیست؟ (۱) $7x \equiv 3 \pmod{6}$ (بیمانه ۶) (۲) $6x \equiv 5 \pmod{11}$ (بیمانه ۱۱) (۳) $4x \equiv 5 \pmod{6}$ (بیمانه ۶) (۴) $4x \equiv 6 \pmod{7}$ (بیمانه ۷)	۱
۶	به کمک قضیه ی تقسیم، افراز مجموعه ی Z را به سه زیر مجموعه ی آن بنویسید.	۱

اداره گل آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختیاری (http://chb.medu.ir)	اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ شهرکرد	تاریخ آزمون:	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
آزمون درس: ریاضیات گسسته	رشته تحصیلی: ریاضی و فیزیک	نوبت آزمون: دی ماه	تعداد صفحات: ۲
پایه تحصیلی: دوازدهم	نام آموزشگاه:	ساعت آزمون:	تعداد پرسش ها: ۱۷
نام و نام خانوادگی:	نام کلاس:	نام دبیر:	طراح: علی روزدار

۷	اگر $a, b \in Z$ و $a b$ نشان دهید برای اعداد طبیعی m و n که $m \leq n$ داریم $a^m b^n$	۱
۸	نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد را می توان به صورت $8t + 1$ نوشت.	۱
۹	فرض کنید برای عددی صحیح مانند k داشته باشیم: $4 3k - 2$ ، ثابت کنید $16 9k^2 - 4$.	۱/۲۵
۱۰	دو گزاره ی هم ارز برای $(m \equiv a \pmod{b})$ بنویسید.	۰/۵
۱۱	به کمک ویژگی های هم نهستی، باقیمانده ی تقسیم عدد 3^{37} را بر ۷ بیابید.	۱/۵
۱۲	اگر ۷ آبان سال ۱۳۹۷ روز دوشنبه باشد، به کمک ویژگی های هم نهستی، مشخص کنید ۷ آبان سال ۱۴۰۱ چه روزی از هفته است؟	۱/۲۵
۱۳	جواب های عمومی معادله ی سیاله ی خطی $3x + 7y = 13$ را بدست آورید.	۱/۵
۱۴	مجموعه ی رأس ها و مجموعه ی بال های گراف ساده ی G در زیر داده شده است. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $E(G) = \{v_1v_4, v_2v_1, v_3v_1, v_3v_4, v_4v_2, v_4v_5\}$ الف) این گراف و مکمل آن، (G^c) را رسم کنید. ب) $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ ، $\Delta(G^c)$ و $\delta(G^c)$ را بنویسید.	۲
۱۵	یک گراف ۶ رأسی رسم کنید که شامل ویژگی های زیر باشد، الف) یک رأس تنها (ایزوله)؛ ب) دور به طول ۳ ج) اندازه $\delta = 5$	۰/۷۵
۱۶	نشان دهید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۷	در یک میهمانی، ۷ نفر حاضر می شوند، آیا امکان دارد هر نفر دقیقاً با ۳ نفر دیگر دست بدهد؟ چرا؟	۰/۷۵
۲۰	پیروز باشید!	

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ آزمون:	اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ شهرکرد	اداره کل آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختاری (http://chb.medu.ir)
تعداد صفحات: ۳	نوبت آزمون: دی ماه	رشته تحصیلی: ریاضی و فیزیک	پاسخنامه آزمون ریاضیات گسسته
طراح: علی روزدار	ساعت آزمون:	نام آموزشگاه:	پایه تحصیلی: دوازدهم

ردیف	سوالات	نمره
۱	الف) درست، مثال نقض: $n = 6$. $2^6 + 2(4) - 1 = 75 = 3 \times 5 \times 5$. اول نیست. ب) درست، اثبات: $k = n(n+1) \rightarrow 4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$	۱/۲۵
۲	برهان خلف: فرض کنیم $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ عددی زوج نیست، پس فرد است. در این صورت هر سه عامل $b_1 - a_1$ و $b_2 - a_2$ و $b_3 - a_3$ باید فرد باشند. از این رو، جمع شان نیز یک عدد فرد است. اما، $b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3 = b_1 + b_2 + b_3 - (a_1 + a_2 + a_3)$ $= (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3) = 0$ ولی این غیر ممکن (تناقض) است. زیرا مجموع سه عدد فرد، یک عدد فرد می شود. این تناقض، ناشی از فرض خلف است. پس، فرض خلف باطل و عدد داده شده زوج است.	۱/۲۵
۳	اثبات به روش بازگشتی: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{b+a}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + a^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ نامساوی پایانی، بدیهی است. پس نامساوی داده شده نیز همیشه درست است.	۱/۵
۴	الف) ۲ (ب) (پیمانه $3(3) \equiv 7x$ (ج) ۵ رأس و ۱۰ یال	۱
۵	الف) ۲ (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۳	۱
۶	اگر a یک عدد صحیح باشد، باقیمانده ی a در تقسیم بر ۳، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ است. بنا به قضیه ی تقسیم، a را می توان به یکی از شکل های زیر نوشت: $a = 3k + 2$. $a = 3k + 1$. $a = 3k$ از این رو $A_0 = \{a \in \mathbb{Z} a = 3k\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$ $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} a = 3k + 1\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} a = 3k + 2\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ این سه زیر مجموعه از \mathbb{Z} ، یک افراز مجموعه ی \mathbb{Z} را تشکیل می دهند. زیرا هیچ کدام تهی نیستند، هیچ دو تایی از آن ها اشتراک ندارند، و اجتماع این سه مجموعه، برابر مجموعه ی \mathbb{Z} است.	۱
۷	$a b \rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} b = aq \rightarrow b^m = a^m q^m = a^m q' \rightarrow a^m b^m$ $\rightarrow a^m b^m b^{n-m} \rightarrow a^m b^n$	۱

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ آزمون:	اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ شهرکرد	اداره کل آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختاری (http://chb.medu.ir)
تعداد صفحات: ۳	نوبت آزمون: دی ماه	رشته تحصیلی: ریاضی و فیزیک	پاسخنامه آزمون ریاضیات گسسته
طراح: علی روزدار	ساعت آزمون:	نام آموزشگاه:	پایه تحصیلی: دوازدهم

۱	<p>بنا به قضیه تقسیم، هر عدد صحیح را می توان به یکی از چهار صورت $a = 4k$، $a = 4k + 1$، $a = 4k + 2$ یا $a = 4k + 3$ نوشت. بنابراین، اگر عددی فرد باشد، به یکی از دو صورت $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$ خواهد بود. در این صورت، داریم:</p> $a = 4k + 1 \rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8t + 1$ $a = 4k + 3 \rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t + 1$	۸
۱/۲۵	$4 3k - 2 \rightarrow 4^2 (3k - 2)^2 \rightarrow 16 9k^2 - 12k + 4$ $4 3k - 2 \rightarrow 4(4) 4(3k - 2) \rightarrow 16 12k - 8$ $\rightarrow 16 (9k^2 - 12k + 4) + (12k - 8)$ $\rightarrow 16 9k^2 - 4$	۹
۰/۵	۱. باقیمانده های تقسیم a و b بر m ، یا هم برابر است. ۲. $m a - b$	۱۰
۱/۵	$3^3 = 27 \equiv -1 \text{ (بیمانه ۷)} \rightarrow (3^3)^{12} \equiv (-1)^{12} \text{ (بیمانه ۷)} \rightarrow 3^{36} \equiv 1 \text{ (بیمانه ۷)}$ $\rightarrow 3(3^{36}) \equiv 3 \text{ (بیمانه ۷)} \rightarrow 3^{37} \equiv 3 \text{ (بیمانه ۷)}$ <p>پس باقیمانده برابر ۳ است.</p>	۱۱
۱/۲۵	<p>$1401 - 1397 = 4$. پس، با در نظر گرفتن سال کبیسه در میان این ۴ سال، تعداد روز ها برابر است با</p> $4(365) + 1 = 1461 . 1461 \equiv 5 \text{ (بیمانه ۷)}$ <p>چون ۵ روز پس از دوشنبه، به شنبه می رسیم، پس ۷ آبان ۱۴۰۱، روز "شنبه" خواهد بود.</p>	۱۲
۱/۵	$3x \equiv 13 \text{ (بیمانه ۷)}$ $13 \equiv 6 \text{ (بیمانه ۷)}$ $\rightarrow 3x \equiv 6 \text{ (بیمانه ۷)}$ $(3 \cdot 7) = 1 6$ $\rightarrow x \equiv 2 \text{ (بیمانه ۷)} \rightarrow x = 7k + 2$ $3(7k + 2) + 7y = 13 \rightarrow y = -3k + 1$	۱۳
۱	<p>The left diagram shows a triangle with medians intersecting at a point labeled G^c. The right diagram shows a triangle with medians intersecting at a point labeled G (الف).</p>	۱۴

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ آزمون:	اداره آموزش و پرورش ناحیه ۱ شهرکرد	اداره کل آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختاری (http://chb.medu.ir)
تعداد صفحات: ۳	نوبت آزمون: دی ماه	رشته تحصیلی: ریاضی و فیزیک	پاسخنامه آزمون ریاضیات گسسته
طراح: علی روزدار	ساعت آزمون:	نام آموزشگاه:	پایه تحصیلی: دوازدهم

		ب) $\delta(G) = 1$ ، $\Delta(G) = 4$ ، $\delta(G^c) = 0$ و $\Delta(G^c) = 3$	
۰/۷۵			۱۵
۱		<p>فرض کنید G یک گراف، A مجموعه ی رأس های فرد و B مجموعه ی رأس های زوج این گراف باشند. در این صورت:</p> $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ <p>از طرفی، می دانیم $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ عددی زوج و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ که مجموع چند عدد زوج است نیز، عددی زوج است. پس، $\sum_{v \in A} \deg(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) - \sum_{v \in B} \deg(v)$ نیز عددی زوج است. اما، این مقدار، مجموع چند عدد فرد است. پس تعداد این عدد های فرد، و در نتیجه، تعداد رأس های فرد گراف G عددی زوج است.</p>	۱۶
۰/۷۵		<p>خیر، زیرا در آن صورت، باید یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ی ۷ داشته باشیم، و این غیر ممکن است. چون، مجموع درجه های رأس های این گراف برابر ۲۱ می شود، در حالی که باید عددی زوج باشد.</p>	۱۷
۲۰		همکاران گرامی، برای پاسخ های درست دیگر، پام مناسب در نظر بگیرید.	