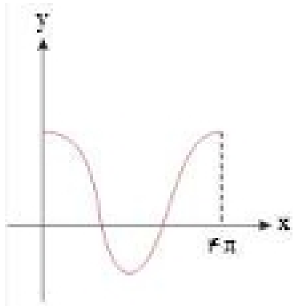
نام و نام خانوادگی: .... مقطع و رشته: یازدهم ریاضی نام پدر: .... شماره داوطلب: .... تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه	جمهوری اسلامی ایران	نام درس: حسابان نام دبیر: تاریخ امتحان: ساعت امتحان: مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	محل مهر یا امضاء مدیر	بارم
۱	در یک دنباله‌ی هندسی نزولی هر جمله‌ی آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.		۱
۲	دریک دنباله‌ی هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.		۱
۳	دو تابع $f = \{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)\ \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a را به‌دست آورید.		۱
۴	از دو معادله‌ی دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$ ، مقدار y را به‌دست آورید.		۱/۵
۵	مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1 < \frac{2x+1}{x-2} < 3$ را به‌دست آورید.		۱
۶	اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ را به‌دست آورید.		۱
۷	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. $A)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)$ $B)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $C)\ \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)$ $D)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$		 ۱/۲۵ ۱/۵ ۱/۲۵ ۱
۸	تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ ، به ازای چه مقدار a در نقطه‌ای به‌طول $x = 0$ پیوسته است؟		۱
۹	از دو معادله‌ی $\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3$ و $\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0$، مقدار xy را به‌دست آورید.		۱
۱۰	از دو معادله‌ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار x را به‌دست آورید؟		۱
۱۱	اگر عبارت $\sqrt[3]{2x - x^2} + \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x را به‌صورت بازه نمایش دهید؟		۱
۱۲	اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد،مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را بدست آورید.		۱/۵
۱۳	اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x - x^2}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع gof ، را به‌دست آورید.		۱/۵

ردیف	ادامه ی سؤالات — محل مهر یا امضاء مدیر	بارم
۱۴	شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲cosmx$ است. مقدار تابع را در نقطه‌ای به طول $x = \frac{۱۶\pi}{۳}$ بدست آورید. 	۱/۵

موفق باشید. جمع بارم : ۲۰ نمره

نام درس: حسابان
نام دبیر:
تاریخ امتحان:
ساعت امتحان:
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

کلید سوالات پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر

۱

$$a_۱ = \frac{۱}{۲}(a_۲ + a_۳ + \cdots)\ , \qquad S_{حد} = \frac{a_۱}{۱-q}$$

$$a_۱ = \frac{۱}{۲}\times\frac{a_۲}{۱-q} \to a_۱ = \frac{۱}{۲}\times\frac{a_۱ q}{۱-q} \to ۱ = \frac{q}{۲-۲q} \to q = ۲-۲q \to ۳q = ۲ \to q = \frac{۲}{۳}$$

۲

$$S_{حد} = \frac{a_۱}{۱-q}$$

$$a_۱\ , a_۲\ , a_۳\ , \ldots \to a_۱\ , a_۱ q\ , a_۱ q^۲ , \ldots$$

$$a_۱^۲\ , a_۲^۲\ , a_۳^۲\ , \ldots \to a_۱^۲\ , a_۱^۲ q^۲\ , a_۱^۲ q^۴\ , \ldots$$

مجموع مجذورات تمام جملات $= \frac{۲}{۳}$ (مجذور مجموع تمام جملات) $\to \frac{a_۱^۲}{۱-q^۲} = \frac{۲}{۳}\left(\frac{a_۱}{۱-q}\right)^۲$

$$\frac{a_۱^۲}{(۱-q)(۱+q)} = \frac{۲}{۳}\times\frac{a_۱^۲}{(۱-q)^۲} \longrightarrow \frac{۱}{۱+q} = \frac{۲}{۳(۱-q)} \longrightarrow ۳-۳q = ۲+۲q \longrightarrow q = \frac{۱}{۵}$$

۳

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$f^{-۱}\big(g(۲a)\big) = f(۶) = g(۲a) \longrightarrow ۳ = \frac{۲a}{۲a-۱} \longrightarrow ۶a - ۳ = ۲a \longrightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

۴

$$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \longrightarrow ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \longrightarrow ۲^{x-۷+۲x+۲y} = ۱ \longrightarrow ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱$$

$$۳x + ۲y - ۷ = ۰$$

$$\log y = ۲\log ۳ + \log x \longrightarrow \log y = \log ۹ + \log x \longrightarrow \log y = \log ۹x \longrightarrow y = ۹x$$

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۷ \\ y = ۹x \end{cases} \longrightarrow ۳x + ۱۸x = ۷ \longrightarrow ۲۱x = ۷ \longrightarrow x = \frac{۱}{۳}\ , y = ۹\left(\frac{۱}{۳}\right) = ۳$$

۵

نامعادله‌ی داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{۳x-۱}{x-۳} > -۱ \longrightarrow \frac{۳x-۱}{x-۳} + ۱ > ۰ \longrightarrow \frac{۳x+۱+x-۳}{x-۳} > ۰ \longrightarrow \frac{۴x-۲}{x-۳} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۳		$+\infty$
عبارت > ۰		+	۰	−	ت‌ن	+	

$$\longrightarrow x < \frac{۱}{۲} \ \text{یا}\ x > ۳ \qquad (I)$$

$$\frac{۳x-۱}{x-۳} < 3 \longrightarrow \frac{۳x-۱}{x-۳} - ۳ < ۰ \longrightarrow \frac{۳x+۱-۳x+۹}{x-۳} < ۰ \longrightarrow \frac{۱۰}{x-۳} < ۰ \longrightarrow x < ۳ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x < \frac{۱}{۲}$ می‌رسیم.

۶

$$g\big(f(x)\big) = \frac{۲\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right)+۲}{۲-\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right)} = \frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}} = \frac{۶x}{۳} = ۲x$$

۷

$$A)\ \lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x} - \frac{x+۱}{x-۲}\right) = \frac{۰}{۰} \Longrightarrow HOP: \lim_{x\to ۲}\left(\frac{-۲x-۱}{۲x-۲}\right) = \frac{-۴-۱}{۴-۲} = -\frac{۵}{۲}$$

$$B)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{cos۲x} - \sqrt{cosx}}{x^۲} = \frac{۰}{۰} \Longrightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\frac{۹}{۲}x^۲} - \sqrt{۱-\frac{۱}{۲}x^۲}}{x^۲} = \lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۸}{۴}x^۲}{x^۲} = -۲$$

$$C)\ \lim_{x\to -۱}\left(\frac{۲}{x^{۲}-۱}-\frac{x}{x+۱}\right) = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to -۱}\left(\frac{۲}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{x}{x+۱}\right) = \lim_{x\to -۱}\left(\frac{۲-x^{۲}+x}{x^{۲}-۱}\right) = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{-(x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)} = -\frac{۳}{۲}$$

$$D)\ \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱-\cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\frac{(\sqrt{x})^{۲}}{۲}}{x} = \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲}$$

۸

شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow HOP:\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۱-x}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$f(۰)=a$$

پس $a=۲$ است.

۹

$$\ln(۲x+۱)+\ln(y-۲)-\ln y = \ln ۳ \longrightarrow \ln\frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y} = \ln ۳ \longrightarrow \frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y} = ۳$$

$$۲xy-۴x+y-۲ = ۳y \longrightarrow ۲xy = ۴x+۲y+۲ (I)$$

$$\ln(۲y-۳x)+\ln ۲ = ۰ \longrightarrow \ln(۴y-۶x) = ۰ \Longrightarrow (\ln ۱ = ۰) \Longrightarrow ۴y-۶x = ۱ \Longrightarrow y = \frac{۱+۶x}{۴}$$

با جایگذاری y در رابطه‌ی (I) داریم:

$$۲x\left(\frac{۱+۶x}{۴}\right) = ۴x+۲\left(\frac{۱+۶x}{۴}\right)+۲ \longrightarrow \frac{x+x^{۲}}{۲} = ۴x+\frac{۱+۶x}{۲}+۲ \Longrightarrow ۶x^{۲}-۱۳x-۵ = ۰$$

$$\Delta = b^{۲}-۴ac = ۱۶۹+۱۲۰ = ۲۸۹ \longrightarrow \begin{cases} x_{۱} = \dfrac{۱۳+۱۷}{۱۲} = \dfrac{۵}{۲} & \text{ق ق} \\ x_{۲} = \dfrac{۱۳-۱۷}{۱۲} = -\dfrac{۱}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$y = \frac{۱+۶x}{۴} \Longrightarrow y = \frac{۱+۱۵}{۴} = ۴ \Longrightarrow xy = \left(\frac{۵}{۲}\right)(۴) = ۱۰$$

۱۰

$$۳^{۲x+y} = ۹\times ۳^{x-y} \longrightarrow ۳^{۲x+y} = ۳^{۲}\times ۳^{x-y} \longrightarrow ۳^{۲x+y} = ۳^{۲+x-y} \Longrightarrow x = ۲-۲y$$

$$\log(x+۲y) = ۱+\log y \longrightarrow \log(x+۲y) = \log ۱۰+\log y \longrightarrow \log(x+۲y) = \log ۱۰y$$

$$x+۲y = ۱۰y \longrightarrow x = ۸y \Longrightarrow (x = ۲-۲y) \Longrightarrow ۲-۲y = ۸y \longrightarrow ۱۰y = ۲ \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{۲}{۱۰} \\ x = ۸y \Longrightarrow x = \dfrac{۱۶}{۱۰} \end{cases}$$

۱۱

چون یک چندجمله‌ای در زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$-\frac{۹}{۲} \geq ۰ \longrightarrow \frac{۴-۹x^{۲}}{۲x^{۲}} \geq ۰ \longrightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \longrightarrow ۹x^{۲} = ۴ \longrightarrow x^{۲} = \dfrac{۴}{۹} \longrightarrow x = \pm\dfrac{۲}{۳} \\ \text{مخرج} = ۰ \longrightarrow ۲x^{۲} = ۰ \longrightarrow x = ۰ \end{cases}$$

۱۲

$$\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha-\left(\cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{۴}\cos a+\sin\frac{\pi}{۴}\sin a-\cos\frac{\pi}{۴}\cos a+\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha = ۲\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha \Longrightarrow ۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\sin\alpha = \sqrt{۲}\sin\alpha$$

از طرفی : $\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۷}{۹} = \frac{۲}{۹} \to \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۳} \Longrightarrow$ در ربع چهارم $\sin$ منفی $\Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

$\Longrightarrow \sqrt{۲}\sin\alpha = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۳}) = -\frac{۲}{۳}$

۱۳

ابتدا دامنه تعریف دو تابع f و g را به‌دست می‌آوریم.

$f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-۱,۱\}$

$g(x) = \sqrt{x - x^۲} \Longrightarrow D_g : x - x^۲ \geq ۰ \longrightarrow x(۱ - x) \geq ۰ \longrightarrow$ تعیین علامت $\longrightarrow ۰ \leq x \leq ۱$

$$gof = \{x \in D_f\, , f(x) \in D_g\} = \left\{x \neq ۱\, , x \neq -۱\, , ۰ \leq \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱\right\} \quad (I)$$

$\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \geq ۰ \longrightarrow ۱ - x^۲ > ۰ \longrightarrow x^۲ < ۱ \longrightarrow -۱ < x < ۱ \quad (II)$

$\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱ \longrightarrow \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} - ۱ \leq ۰ \longrightarrow \frac{۱ + x^۲ - ۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \longrightarrow \frac{۲x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \quad (III)$

از اشتراک I ، II و III به جواب $x = ۰$ می‌رسیم.

۱۴

از روی شکل مشخص است که دوره تناوب برابر با ۴π است.

$T = \frac{۲\pi}{|b|} \longrightarrow ۴\pi = \frac{۲\pi}{|m|} \longrightarrow ۲ = \frac{۱}{|m|} \longrightarrow m = \frac{۱}{۲}\, , m = -\frac{۱}{۲}$

چون $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{۱}{۲}\, , m = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

$y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx \longrightarrow y(\frac{۱۶\pi}{۳}) = ۲\cos(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$

$y(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$

جمع بارم : ۲۰	نام و نام خانوادگی مصحح :	امضاء: