

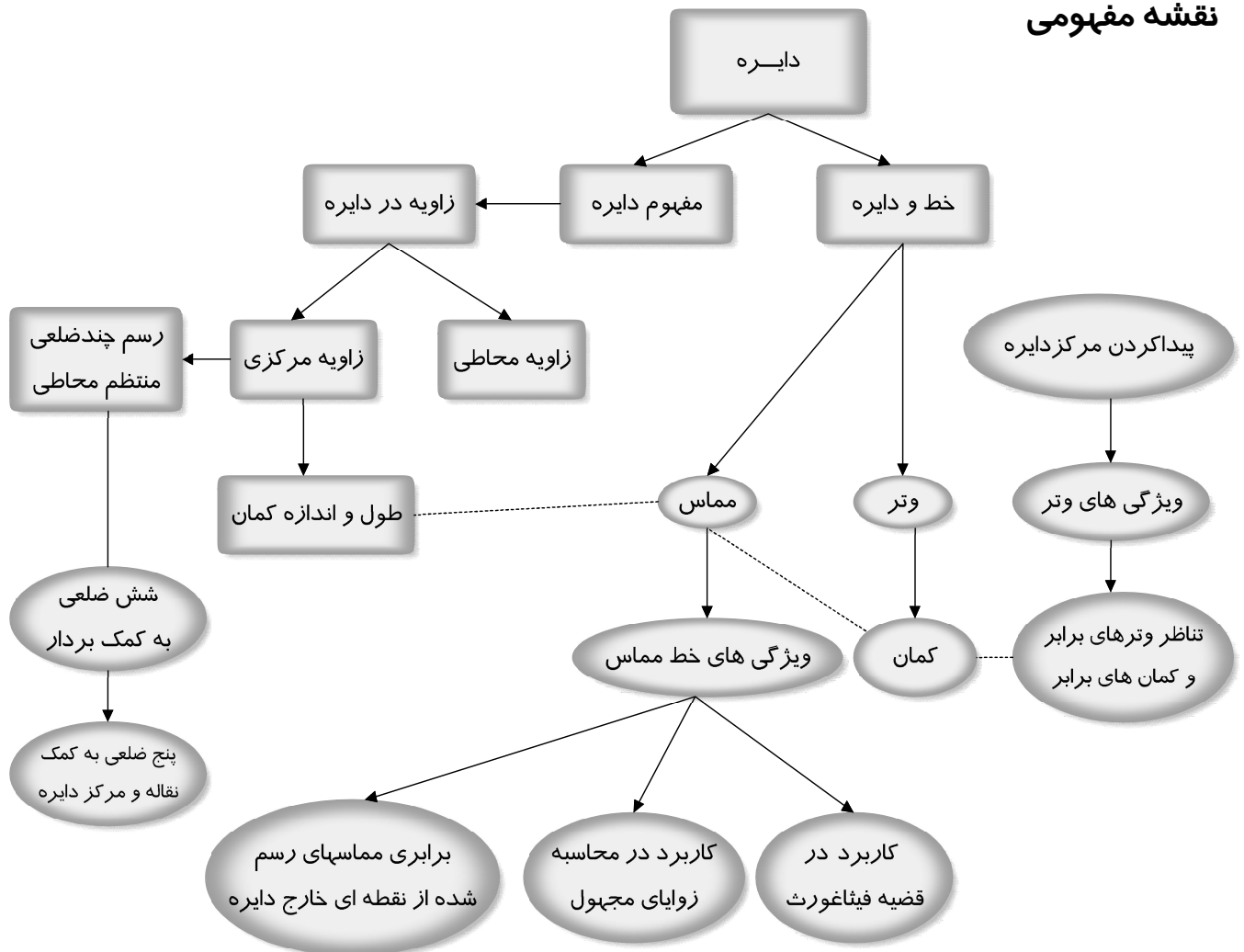
فصل نهم - دایره

راهنمای معلم - ریاضی هشتم

نگاه کلی به فصل

در درس اول موضوع خط مماس بر دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع در نقطه تماس تدریس می شود. در درس های بعدی زاویه های مرکزی و محاطی و رابطه ی بین آنها مطرح می شود. در قسمت زاویه محاطی، برابری زاویه های محاطی رو به یک کمان و زاویه های محاطی رو به قطر (90°) مورد تأکید است.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر عنوانی این بخش دو جنبه مد نظر می باشد. یکی هنر طراحی و معماری ایرانی و ارتباط آن با هندسه، و دیگری یادآوری نقش بسزای فیلسوف و ریاضیدان ایرانی، خیام نیشابوری و تأثیر عمیق وی در ریاضیات، نجوم و ادبیات است.

خط و دایره

هدف

- ۱- تعریف دایره را بداند و اجزای آنرا بشناسد.
- ۲- وضعیت های ممکن برای یک خط و یک دایره را بداند.
- ۳- خط مماس بر دایره را بشناسد و ویژگی های آن را بداند و در مسائل به کار برد.
- ۴- وتر دایره را بشناسد و بداند یک قطر دایره بر یک وتر دایره عمود است اگر و تنها اگر آن وتر را نصف کند.
- ۵- بتواند مرکز دایره ای داده شده را با استفاده از خواص وترهای آن بدست آورد.
- ۶- مفاهیم یاد شده را در حل مسئله به کار برد.

ابزار مورد نیاز

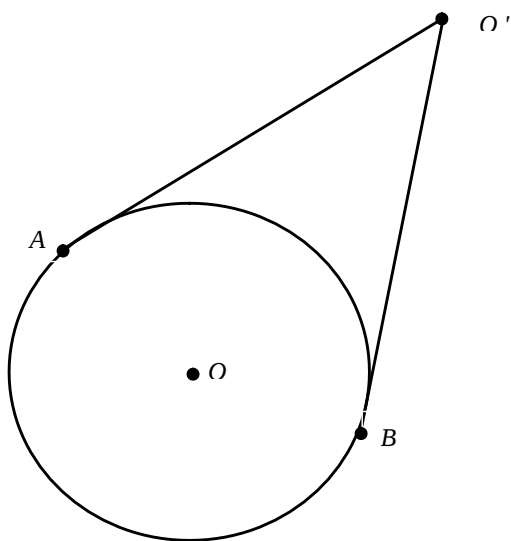
- ۱- نقاله
- ۲- پرگار
- ۳- خط کش

ابتدا می توانید با معطوف کردن توجه دانش آموزان به کاربردهای بسیار مهم دایره اهمیت این شکل هندسی را در ذهن آنها بیشتر کنید. سعی کنید با کشیدن شکل‌های متفاوت دانش آموزان کاملاً متوجه شوند که یک خط و یک دایره براساس تعداد نقاط تقاطع‌شان سه حالت مختلف می توانند داشته باشند. سعی کنید با کشیدن نقاطی در درون، بیرون و روی دایره ای مفروض رابطه ای که بین موقعیت های مختلف نقطه‌ی مورد نظر با دایره، و فاصله‌ی آن نقطه از مرکز دایره وجود دارد را در ذهن دانش آموزان مشخص کنید. برای واضح تر شدن این موضوع که فاصله‌ی یک نقطه از یک خط چگونه پاره خطی است و همچنین در فعالیت ۳ صفحه‌ی ۱۳۸ کوتاه‌ترین پاره خط کدام است، از دانش آموزان بخواهید که فرض کنند در فاصله‌ای از یک دیوار قرار دارند و بخواهند با دویدن با سرعت هر چه بیشتر در کمترین زمان ممکن به دیوار برسند. بر چه مسیری حرکت می کنند؟ مسیر حرکت آنها با دیوار نسبت به هم چگونه اند؟

در فعالیت ۳ صفحه ۱۴۰ با توجه به نتایج بدست آمده در قسمت های ۲و۱ همچنین فعالیت، دو وتر دلخواه رسم کرده و مرکز دایره را که محل برخورد عمود منصف‌های آن دو وتر می باشد، بدست آورده و بدین صورت طول قطر دایره را که مورد نظر سؤال می باشد، محاسبه می کنیم.

حل بعضی از تمرین ها

۱- با توجه به عمود بودن شعاع دایره و مماس بر دایره کافی است از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.



۲- الف) دو مثلث $O'AO$ و $O'BO$ را تشکیل می دهیم. با توجه به اینکه $OA=OB$ و OO' در هر دو مثلث وتر می باشد، لذا این دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر

و یک ضلع با هم هم‌نهشت می باشند و بنابراین $O'A=O'B$ یعنی "دو مماس رسم شده از هر

نقطه خارج از یک دایره بر آن دایره، با هم برابرند...

ب) از هم‌نهشتی دو مثلث $O'AO$ و $O'BO$ می توان نتیجه گرفت زوایای $BO'O$ و $AO'O$ برابرند و لذا $O'O$ نیمساز زاویه $AO'B$ می باشد.

۳- OC - شعاع = حداکثر عمق آب

با توجه به قائم الزاویه بودن مثلث AOC و رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی OC بدست می آید و با جایگزاری OC و شعاع در رابطه‌ی بالا، حداکثر عمق آب حاصل خواهد شد.

توصیه های آموزشی

۱- با توجه به اینکه در عمل کشیدن یک مماس بر یک دایره بگونه ای که دقیقاً در یک نقطه مشترک باشند غیرممکن است سعی کنید مطمئن شوید که دانش آموزان این

موضوع را دریافته‌اند و این ناتوانی به علت استفاده از ابزار و خطای انسان می باشد. استفاده از شعاع متناظر به یک نقطه از دایره برای رسم مماس در آن نقطه بر دایره معمولاً کار دانش آموزان را در ترسیم آسان‌تر می کند.

۲- بر مفاهیم درون دایره، روی دایره و خارج دایره تأکید کنید و مطمئن شوید دانش آموزان آنها را درک کرده اند.

زاویه های مرکزی

هدف

- ۱- زاویه مرکزی را تشخیص دهد و تعریف آنرا بداند.
- ۲- بداند که اندازه ی کمان برابر است با اندازه ی زاویه مرکزی روبرو به آن.
- ۳- رابطه طول کمان را با اندازه کمان و محیط دایره بداند.
- ۴- بداند در یک دایره کمان های نظیر به وترهای برابر با هم برابرند و وترهای مربوط به کمان های برابر نیز با هم برابرند.
- ۵- مفاهیم فوق را در حل مسائل بکار برد.
- ۶- نحوه رسم چند ضلعی های منتظم به کمک زاویه مرکزی را بداند.

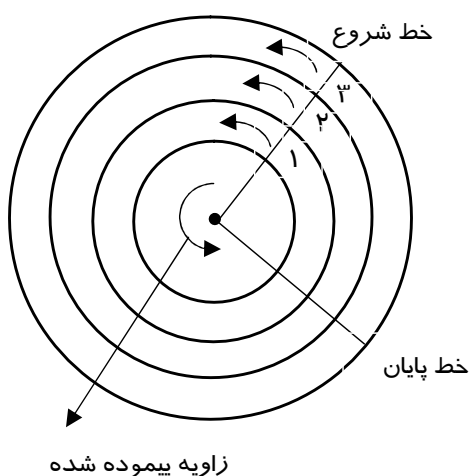
ابزار مورد نیاز

خط کش

پرگار

نقاله

با استفاده از شکل های مختلف مطمئن شوید که دانش آموزان تعریف زاویه مرکزی را بدین طریق که "زاویه ایست که رأس آن در مرکز دایره قرار دارد" درک کرده اند. حال کمان مقابل به آنرا معرفی کرده و در حالی که هنوز حرفی از طول کمان به میان نیامده است تعریف اندازه کمان را به اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن وابسته کنید. با استفاده از شکل هایی که در کتاب آمده یا شکل ها و مثال هایی مانند آنچه در زیر می آوریم دانش آموز را با کمان هایی با اندازه های برابر اما با طول های بسیار متفاوت مواجه کنید.



مثال: فرض کنید مسیر دویدن چند دوندۀ در یک مسابقه مانند شکل مقابل به دور یک زمین دایره شکل باشد و هر دوندۀ در یکی از خطوط (منظور بین دو خط است) مسیر را طی می کند. اگر سه دوندۀ مانند شکل مقابل مسیری که می پیمایند از نظر اندازه زاویه مرکزی کمان طی شده برابر باشد

آیا مسابقه عادلانه بوده است؟ چرا؟ در اینجا چه چیزی باید برابر باشد تا عدالت برقرار باشد؟ اگر نقطه ی پایان مطابق شکل برای همه شرکت کنندگان روی یک خط باشد راه کار شما برای اینکه مسابقه عادلانه برقرار شود چیست؟

در روند فعالیت ۱ صفحه ۱۴۳ اگر تجزیه و تحلیل استدلال رضا برای این نتیجه گیری که زوایا برابرند برای دانش آموز خسته کننده بود، توجه داشته باشید که همنهشتی این مثلث های متساوی الساقین برای نتیجه گیری تساوی زوایای هشت ضلعی کافی است.

هدف فعالیت آخر این بخش درک این مفهوم که در یک دایره وترهای متناظر با دو کمان برابر با هم برابرند و همچنین کمانهای متناظر با دو وتر با هم برابرند، می باشد. می توانید با کشیدن یک دایره و مقایسه کمانهای متفاوت و وترهای آنها، بطور شهودی توجه دانش آموز را به این مطلب که وتر مربوط به کمان بزرگتر، از وتر نظیر به کمان کوچکتر، بزرگتر است، جلب کنید.

در کار در کلاس ۱ صفحه ۱۴۴ با توجه به اینکه $72^\circ = \frac{360^\circ}{5}$ می باشد کافی است در مرکز دایره به کمک نقاله ۵ زاویه مرکزی با اندازه 72° جدا کنیم.

حل بعضی از تمرین ها

۲- زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی روبرو به کمان AB است و لذا اندازه آن برابر با x است. مثلث $\triangle BOC$ متساوی الساقین است و لذا $\widehat{B} = \widehat{C}$. از طرفی $\widehat{AOB}$ زاویه خارجی برای مثلث $\triangle BOC$ است و لذا $\widehat{AOB} = \widehat{B} + \widehat{C} = 2\widehat{C} = x$ بنابراین $\widehat{C} = \frac{x}{2}$.

۳- با توجه به رابطه گفته شده در فعالیت ۵ صفحه ۱۴۲ و اینکه محیط دایره برابر

2π می باشد خواهیم داشت:

کسر طی شده	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱
اندازه کمان	90°	120°	180°	270°	360°
طول کمان طی شده	$2\frac{\pi}{4}$	$2\frac{\pi}{3}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π

۴- الف) زیرا اندازه‌ی همه آنها برابر ۹۰ درجه می باشد.

ب) بله، زیرا متناظر به کمان های برابر از یک دایره هستند.

ج) بله، مثلث ها متساوی الساقین و قائم الزاویه اند. لذا زاویه های روبرو به ساق آنها 45° هستند و لذا چهار زاویه ی مورد نظر قائمه می باشند.

۵- الف) خیر

ب) در تمرین قبل کمان های روبرو به زاویه های مرکزی برابر بودند اما در این تمرین زاویه های روبرو به کمان های مورد نظر گرچه برابر هستند اما زوایای مرکزی نیستند که بتوان برابری کمان ها را نیز نتیجه گرفت.

توصیه های آموزشی

- در مورد این دو مطلب که "وترهای متناظر با کمان های برابر، برابرند" و "کمان های متناظر با وترهای برابر، برابرند" با تأکید بر اینکه این مقایسه ها در یک دایره و یا دو دایره همپهشت درست می باشد دانش آموز را متوجه کنید که چنین نتایجی را در دو دایره متفاوت بکار نبرد.

بد فهمی های رایج دانش آموزان

- ۱- تفاوت اندازه و طول کمان را تشخیص نمی دهند.
- ۲- گاهی برخورد با عباراتی مانند "کمان نظیر به یک وتر" و "وتر نظیر به یک کمان" کمی برای دانش آموزان ناملموس می باشد.

زاویه محاطی

هدف

- ۱- تعریف زاویه محاطی را بداند و زاویه محاطی را تشخیص دهد.
- ۲- نتیجه بگیرد که اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبرو به آن

۳- نتیجه فوق را در حل مسائل بکار ببرد.

۴- زوایای محاطی روبرو به یک کمان را تشخیص دهد.

ابزار مورد نیاز

خط کش

نقاله

پرگار

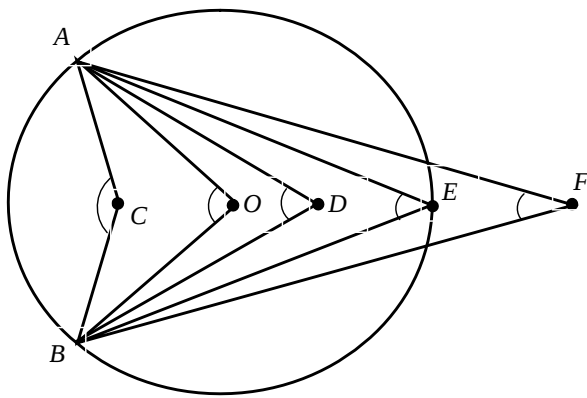
روش تدریس

در شروع این بخش سعی شده برای درک شهودی بهتر، زاویه محاطی از طریق شکل به دانش آموزان معرفی گردد. لذا بهتر است با کشیدن شکل‌های مختلف زوایای محاطی در حالت‌های متفاوت، زاویه‌ی محاطی بطور کامل به دانش آموزان شناسانده شود و سپس تعریف دقیق آن نیز بیان گردد. اصلی‌ترین مفهوم این بخش که همان ارتباط اندازه‌ی زاویه محاطی با کمان روبرو به آن می باشد قدم به قدم در سه مرحله گفته شود و در قسمت آخر فعالیت نتیجه بصورت واضح گفته شود. (بهتر است چرایی نیاز به هر سه مرحله را به دانش آموزان شرح دهید تا آنها نتیجه‌ی کلی که از این سه مرحله استخراج می شود را بهتر درک کنند).

با درک نتیجه‌ی مورد نظر در فعالیت اول فهمیدن اینکه تمام زاویه‌های محاطی روبرو به یک کمان در یک دایره برابرند، بسیار ساده‌تر خواهد شد.

از مثال‌های زیر و نظایر آنها می توانید جهت بالابردن درک دانش آموزان بصورت

شهودی، در این بخش استفاده کنید.



مثال: می توان با استفاده از شکل

مقابل و با توجه به اینکه بطور شهودی کوچک شدن زاویه ها با دورتر شدن رأس زاویه از کمان AB واضح است، نتیجه گرفت:

$$\hat{C} > \hat{O} > \hat{D} > \hat{E} > \hat{F}$$

$\hat{O} = \text{اندازه کمان } AB$
 $\hat{E} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{2}$

و لذا زوایایی مانند $\hat{F}$ که رأس آنها خارج از دایره است از نصف کمان مقابل کوچکترند.

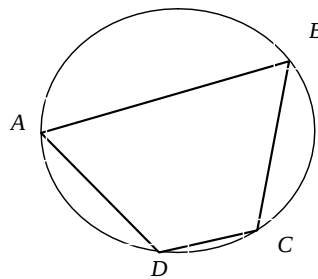
حل بعضی از تمرین ها

۲- $360 \div 72 = 5$ ، لذا محیط دایره که 360° درجه می باشد به ۵ تا کمان با اندازه ۷۲ درجه تقسیم می شود.

۳- الف) ۸ خط تقارن دارد. (ع قطر دایره که نیمساز زاویه های روی محیط دایره می باشند و ع قطر دایره که از امتداد دادن قطرهای مربع های موجود در شکل بدست می آیند).

ب) چون دایره بر ۸ قسمت مساوی تقسیم شده است لذا هر قسمت مساوی $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ می باشد. بنابراین زاویه سبز زاویه ای محاطی و روبروی کمان 90° می باشد و لذا برابر 45° است.

با توجه به اینکه زاویه قرمز و زاویه سبز و زاویه مقابل به سبز که برابر با آن می باشد. سه زاویه یک مثلث می باشند و با توجه به اینکه اندازه زاویه سبز برابر 45° بدست آمد، زاویه قرمزی برابر $180^\circ - 2 \times 45^\circ$ یعنی برابر 90° می باشد.



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}, \hat{B} = \frac{\widehat{CDA}}{2}, \hat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2}, \hat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad (\epsilon)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{CDA} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \end{cases}$$

(د) الف $\hat{O}_1 = x^\circ$ زیرا زاویه مرکزی رو به رو به کمان $\widehat{AB}$ است.

ب) $360^\circ - x^\circ = \text{کمان قرمز}$

ج) $\hat{C} = \frac{\text{اندازه کمان قرمز}}{2} = \frac{360^\circ - x^\circ}{2}$ زیرا زاویه $\hat{C}$ محاطی و رو به رو به کمان

قرمز است.

۶- الف) TX دو برابر شعاع است لذا ۶۰ سانتی متر می باشد.

ب) چون ZR و RT برابرند متساوی الساقین است. از طرفی هر قسمت از ۱۲ قسمت

برابر 30° است $\left(\frac{360}{12} = 30\right)$. لذا $Z\hat{R}T = 60^\circ$ و بنابراین $T\hat{Z}R = R\hat{T}Z = 60^\circ$ و لذا

$\triangle ZRT$ مثلث متساوی الاضلاع می باشد..

ج) طبق ب) $ZT = TR = 30 \text{ cm}$

د) $T\hat{Z}X$ محاطی و روبروی قطر است لذا قائمه می باشد بنابراین $\triangle XTZ$ قائم الزاویه

است.

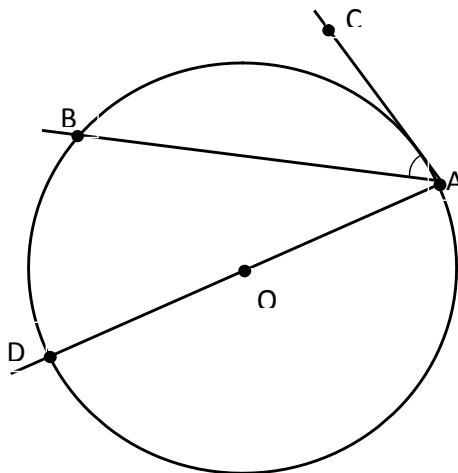
ه) از رابطه فیثاغورس خواهیم داشت $XZ^2 = XT^2 - TZ^2$ که با جایگذاری مقادیر XT و TZ

می توان مقدار XZ را بدست آورد.

مسیرهایی برای توسعه

معرفی زاویه های ظلی، داخلی و خارجی و طرح فعالیت هایی که دانش آموزان را برای یافتن رابطه بین اندازه هر یک از این زاویه ها با اندازه کمان های ایجاد شده روی دایره توسط آن ها تشویق کند، می تواند مسیر خوبی برای توسعه این فصل باشد. فعالیت زیر در راستای این هدف طراحی شده است.

۱- زاویه ظلی



در شکل مقابل، AC بر دایره مماس است و A و B روی دایره قرار دارند. زاویه CAB زاویه ظلی نام دارد.

از A به مرکز دایره وصل می کنیم و خط را ادامه می دهیم تا دایره را در D قطع کند.

با کامل کردن تساوی های زیر اندازه زاویه ظلی را بر حسب کمان های ایجاد شده

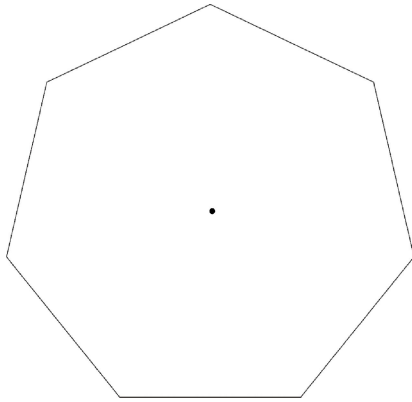
روی دایره بنویسید:

$$\begin{aligned} \widehat{CAB} &= \widehat{CAD} - \widehat{BAD} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\widehat{ABD}}{2} \\ &= \frac{\widehat{ABD}}{2} \end{aligned}$$

دوران چرخشی نیز می تواند در ادامه مسیر این فصل و در ارتباط با فصل سوم

کتاب به دانش آموزان معرفی شود. فعالیت زیر با این هدف طراحی شده است.

۲- یک کاغذ پوستی روی شکل مقابل قرار دهید و تصویر شکل را روی آن رسم



کنید و رأس A را روی آن علامت گذاری نمایید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران قرار دهید و

تصویر را حول آن بچرخانید تا تصویر و شکل برای

اولین بار بر هم منطبق شوند. رأس علامت گذاری شده

در تصویر روی کدام رأس چندضلعی اولیه قرار گرفته

است؟ چرخاندن کاغذ پوستی را ادامه دهید تا در موقعیت اولیه خود قرار بگیرد و

رأس علامت گذاری شده روی رأس A منطبق شود.

در طول انجام این فعالیت، تصویر چند درجه چرخیده است؟

در این حین، تصویر به چند حالت روی شکل منطبق شده است؟

در دوران 360° درجه ای یک شکل، به تعداد دفعاتی که شکل روی خودش تصویر

می شود، مرتبه تقارن چرخشی آن شکل گفته می شود.

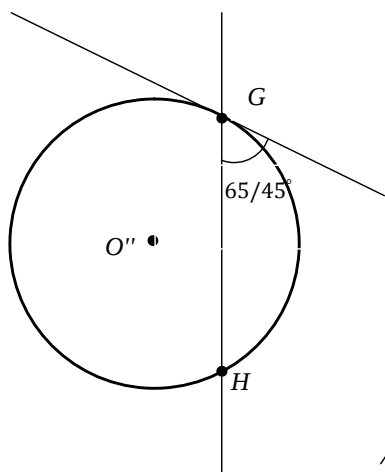
استفاده از ابزارهای فن آورانه

استفاده از نرم افزار جئوجبرا می تواند برای درک بهتر مفاهیم این فصل کمک

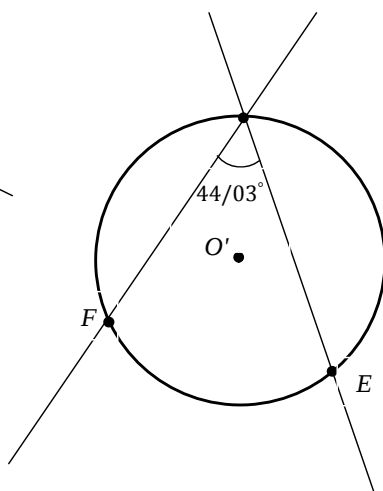
کند. در شکل های زیر حالت های مختلف زاویه و دایره نشان داده شده اند.

دانش آموزان می توانند با حرکت دادن نقاط روی دایره، زاویه ها را تغییر دهند و

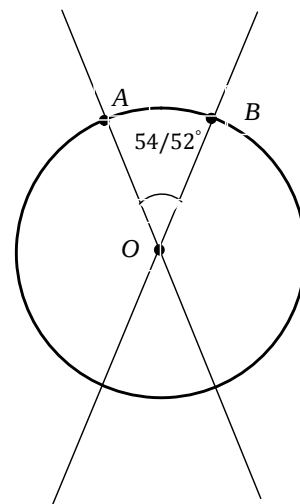
تغییر اندازه کمان یا کمان های رو به رو به زاویه را مشاهده کنند.



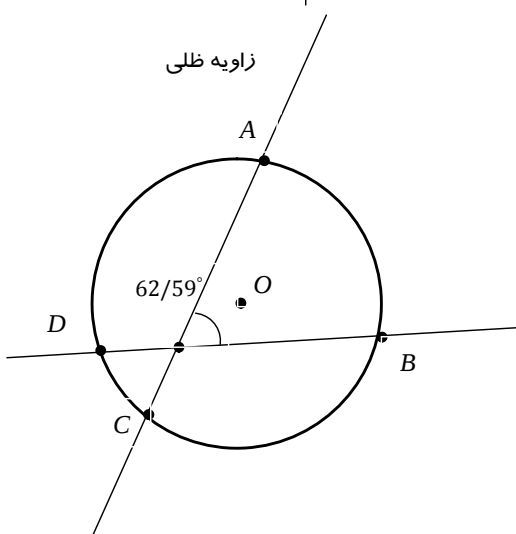
زاویه ظلی



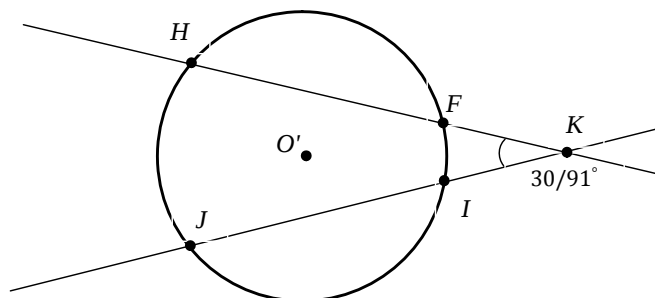
زاویه محاطی



زاویه مرکزی



زاویه داخلی



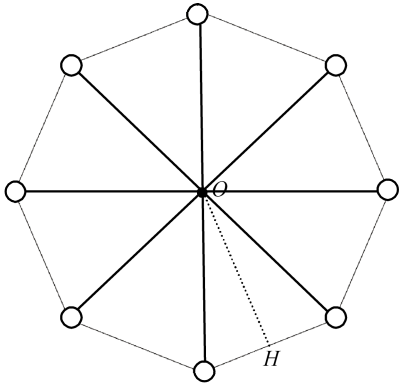
زاویه خارجی

معرفی منابع برای معلمان

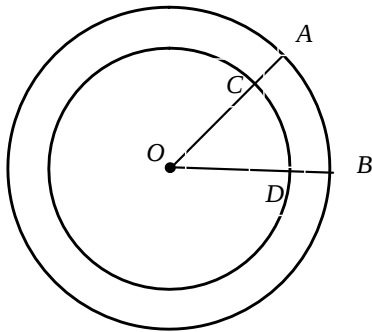
- ریاضیات برای معلمان؛ تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی.ال.

مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۱۷

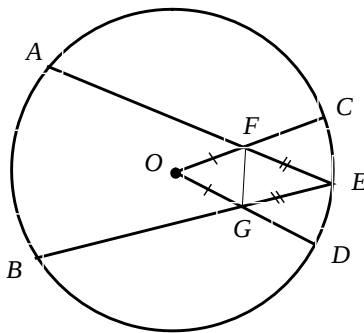
نمونه سئوال های ارزشیابی



- ۱- در شکل چرخ و فلک زیر یک ۸ ضلعی منتظم به طول ضلع ۱۰ متر مشاهده می‌گردد. اگر طول OH برابر ۱۵ متر باشد، فاصله ی دو کابین که روبه‌روی هم قرار دارند چقدر می‌شود؟

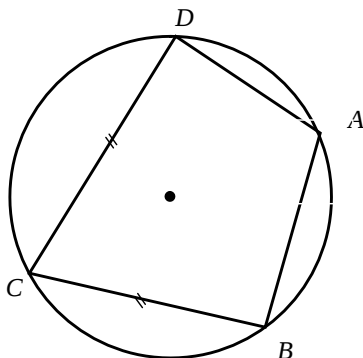


- ۲- محیط دایره ی بزرگ ۳۶ و محیط دایره کوچک ۱۲ متر است. نقطه ی O مرکز مشترک دو دایره است. اگر طول کمان AB ۳ متر باشد، طول کمان CD را به دست آورید.

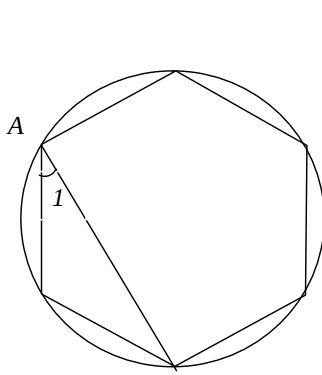


- ۳- مثلث های EFG و OFG متساوی الساقین هستند و کمان AB ۶۰ درجه است. اندازه کمان DC چند درجه است؟

- ۴- در شکل مقابل $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{D} = 110^\circ$ و $CD = CB$ است. اندازه کمان AD را بدست آورید.

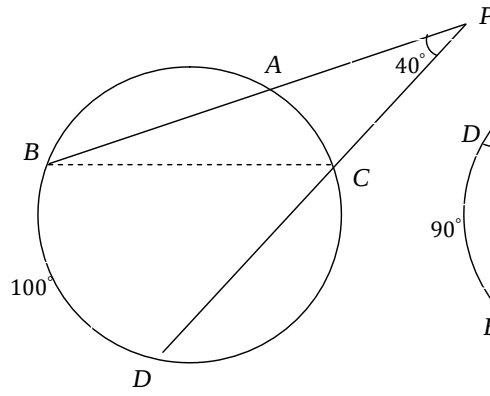


۵- در شکل های زیر زاویه های مورد نظر را به دست آورید.

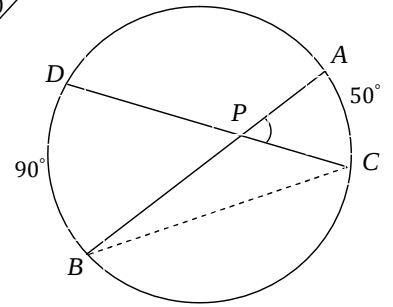


$$\hat{A}_I = ?$$

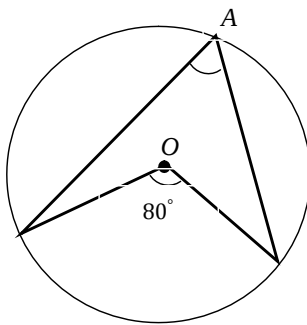
شکل شش ضلعی منتظم است



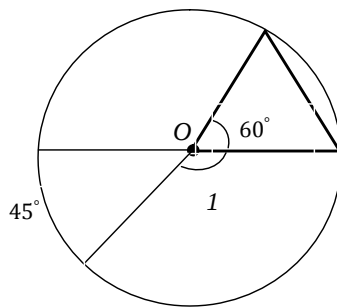
$$\hat{P} = ?$$



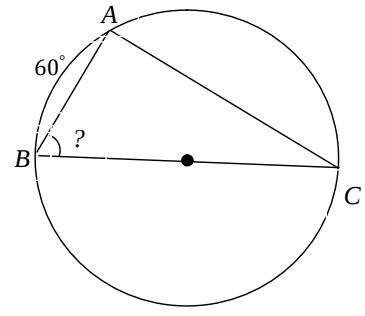
$$\hat{P} = ?$$



$$\hat{A} = ?$$



$$\hat{O}_I = ?$$



$$\hat{B} = ?$$