

استادبانک



نمونه سوالات همراه با جواب و

گام به گام کتاب‌های درسی

به طور کامل رایگان در

اپلیکیشن استادبانک

به جمع ده‌ها هزار کاربر اپلیکیشن رایگان استادبانک پیوندید.

[لینک دریافت اپلیکیشن نمونه سوالات استادبانک \(کلیک کنید\)](#)

* برای مشاهده نمونه سوالات دانلود شده به صفحه بعد مراجعه کنید.

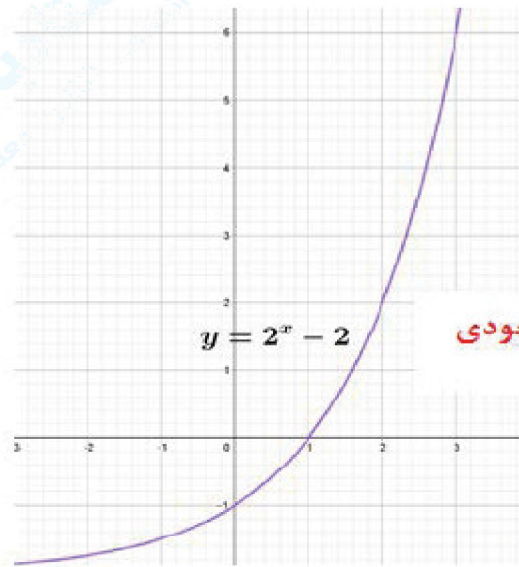
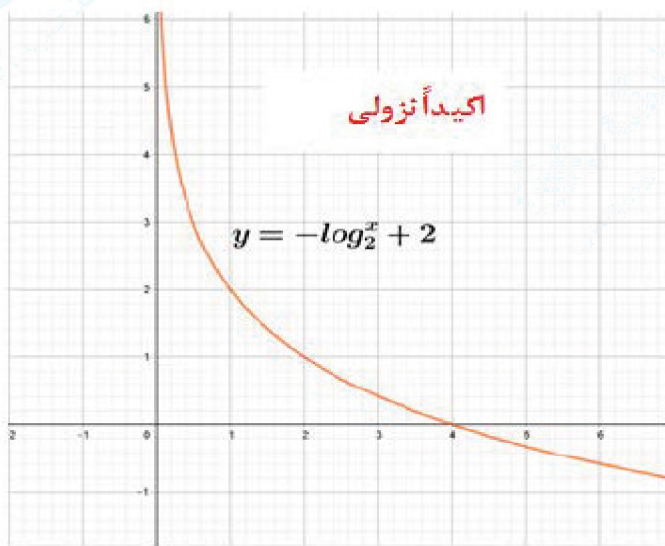
۱- تابع $y = x^2|x|$ در بازه $[-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چه قدر است؟

« پاسخ »

صفر

۲- تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها در کلاس بحث کنید.

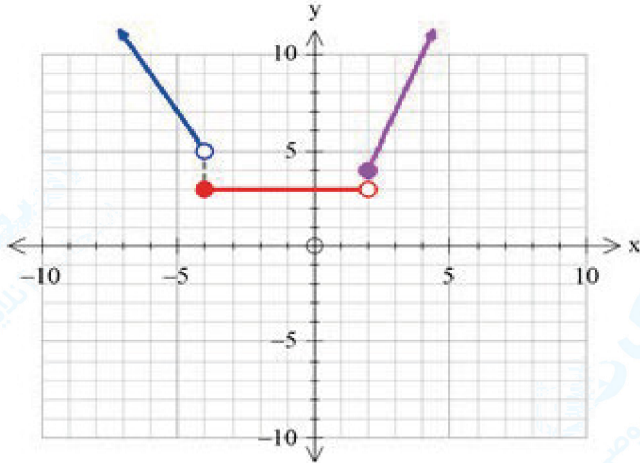
« پاسخ »



۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

« پاسخ »



$x \in [2, +\infty)$ اکیدا صعودی

$x \in (-\infty, -4)$ اکیدا نزولی

ثابت $x \in [-4, 2)$

۴- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) تابع روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

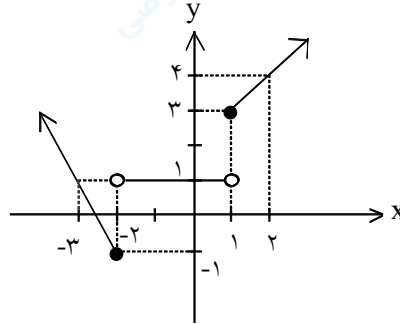
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۳	۴
x	-۲	۱
y	۱	۱
x	-۲	-۳
y	-۱	۱

(الف)



(ب)

$(-\infty, -2] \Rightarrow$ نزولی

$(-2, 1) \Rightarrow$ ثابت

$[1, +\infty) \Rightarrow$ صعودی

مجموعه سوالات استادبانک

۵- با رسم نمودار یکنوایی تابع زیر را بررسی کنید.

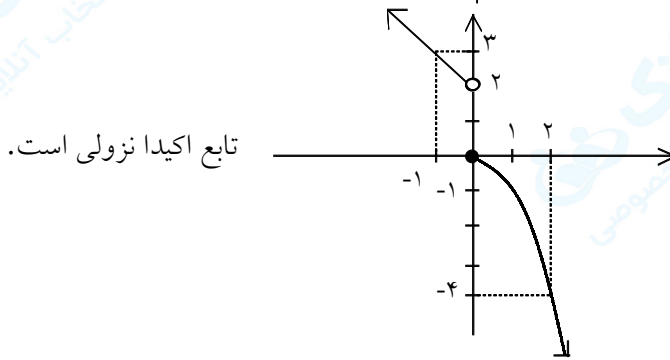
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ -x+2 & x < 0 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ -x+2 & x < 0 \end{cases}$$

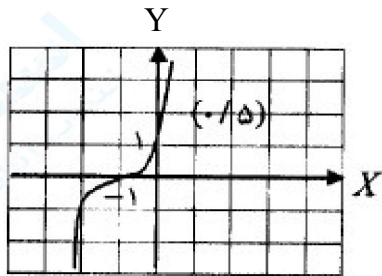
x	۰	۱	۲
y	۰	-۱	-۴

x	۰	-۱
y	۲	۳



۶- نمودار تابع $f(x) = (x+1)^2$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی؟

« پاسخ »

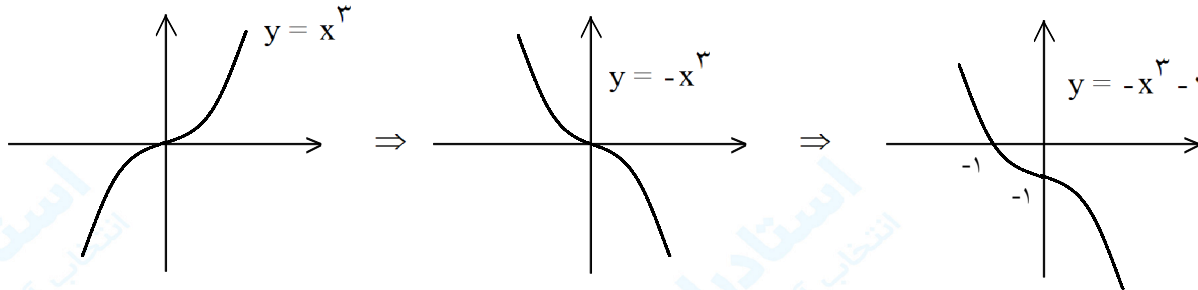


اکیدا صعودی (۰/۲۵)

۷- نمودار $y = -x^3 - 1$ از کدام ربع عبور نمی‌کند؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

« پاسخ »

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



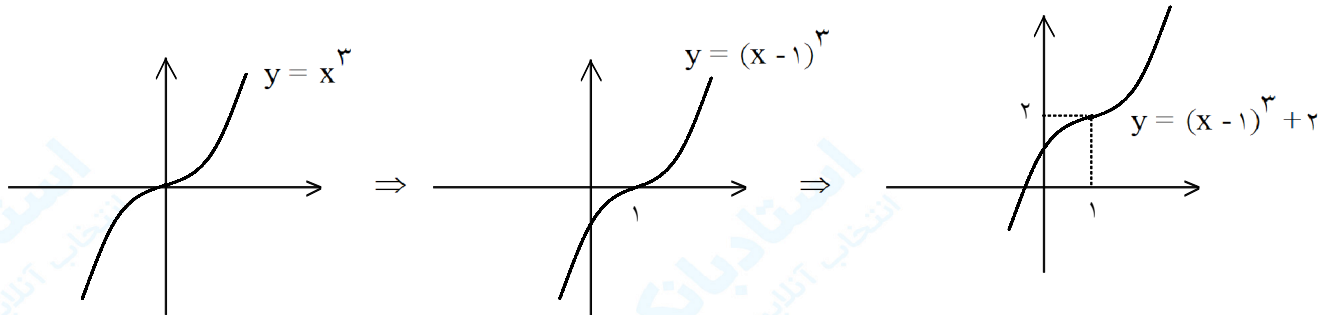
با توجه به نمودار رسم شده، تابع از ربع اول عبور نمی‌کند.

۸- نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

« پاسخ »

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 \Rightarrow y = (x - 1)^3 + 2$$

اتحاد مکعب دو جمله ای



۹- در بازه (a, b) مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$ کم‌تر از ۱ می‌باشد، بیش‌ترین مقدار $b - a$ را حساب کنید.

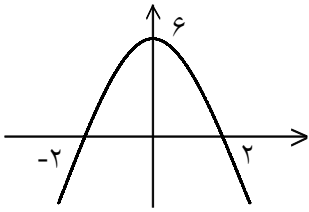
« پاسخ »

باید تابع $f(x)$ را کوچک‌تر از یک قرار دهیم.

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 < 1 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 9x + 12 < 4 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 < 0 \Rightarrow 1 < x < 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a = 8 - 1 = 7$$

۱۰- معادله سهمی زیر را بنویسید.



« پاسخ »

ریشه‌های معادله $x = 2$ و $x = -2$ است. بنابراین داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{\substack{x_1 = 2 \\ x_2 = -2}} y = a(x - 2)(x + 2)$$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند.

$$\xrightarrow{x=0} \begin{matrix} y=6 \\ x=0 \end{matrix} 6 = a(0 - 2)(0 + 2) \Rightarrow a = \frac{6}{-4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2)(x + 2) = -\frac{3}{2}(x^2 - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$

۱۱- اگر $S(-1, 4)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + 5$ باشد، a ، b را حساب کنید.

« پاسخ »

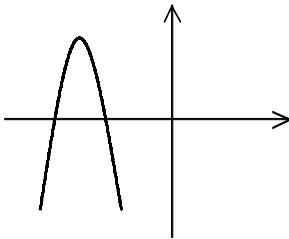
$$x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$S(-1, 4) \xrightarrow{\substack{x=-1 \\ y=4}} 4 = a(-1)^2 + b(-1) + 5 \Rightarrow a - b + 5 = 4 \Rightarrow a - b = -1$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{b=2a} a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$

۱۲- در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a ، b ، c و نیز تعداد جواب‌های این معادله را بنویسید.



« پاسخ »

$$a < 0$$

$$c < 0$$

$$b < 0$$

دو ریشه دارد.

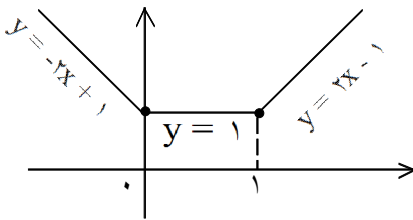
۱۳- آیا تابع $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

« پاسخ »

f غیر یکنواست. \Rightarrow $\left. \begin{array}{l} f \text{ نزولی نیست} \Rightarrow f(1) > f(-1) \Rightarrow -1 > -1 \\ f \text{ صعودی نیست.} \Rightarrow f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$

۱۴- آیا تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = |x| + |x - 1|$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

« پاسخ »



$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل، تابع f ، نه صعودی و نه نزولی است.

۱۵- آیا تابع $f: (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{1-x}$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

« پاسخ »

f غیر یکنواست. \Rightarrow $\left. \begin{array}{l} f \text{ صعودی نمی باشد.} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{2}{1} < \frac{2}{3} \\ f \text{ نزولی نیست.} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{9}{10}\right) \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{10}{1} \end{array} \right\}$

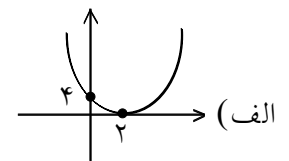
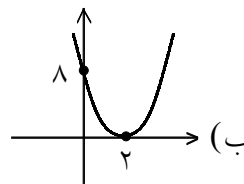
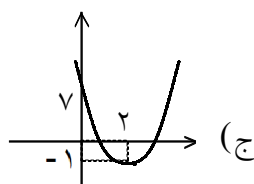
۱۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = (x - 2)^2$

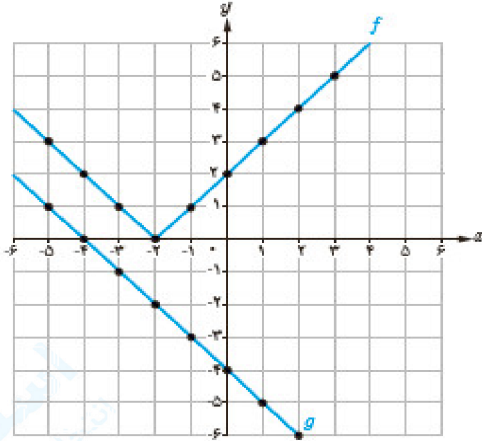
ب) $y = 2(x - 2)^2$

ج) $y = 2(x - 2)^2 - 1$

« پاسخ »



۱۷- با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(f \circ g)(-1)$

ب) $(g \circ f)(0)$

پ) $(f \circ g)(1)$

ت) $(g \circ f)(-1)$

« پاسخ »

الف) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = -6$

پ) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-5) = 3$

ت) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -5$

۱۸- مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آن گاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

« پاسخ »

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = g(5)^2 - 4 = \left(\sqrt{5^2 - 4}\right)^2 - 4 = \left(\sqrt{21}\right)^2 - 4 = 21 - 4 = 17$$

$$= 21 - 4 = 17$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = g \circ f(x)$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(8) = 24$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(5) = f(g(5)) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 \\ g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

الف) نادرست

ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

۱۹- اگر $f(x) = 3x - 4$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ ، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \quad f(x) = 3x - 4$$

$$f(g(x)) = 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 14 = 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3(g(x)) = 3x^2 - 6x + 18$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۲۰- اگر $f(x + 5) = x^2 - 3x$ باشد، $f(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x + 5 = t \Rightarrow x = t - 5 \Rightarrow f(t) = (t - 5)^2 - 3(t - 5) \Rightarrow f(t) = t^2 - 10t + 25 - 3t + 15$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 13t + 40 \Rightarrow f(x) = x^2 - 13x + 40$$

۲۱- تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع $f(2x)$ را مشخص کنید. (در صورتی که دامنه $f(x)$ را $[-2, 7]$ در نظر بگیریم.)

ب) نمودار تابع $f\left(-\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید.

« پاسخ »

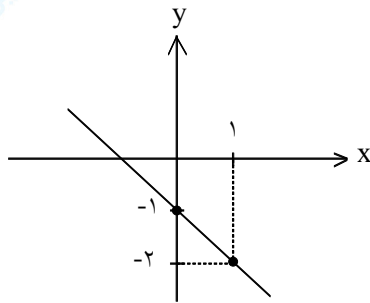
الف)

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 7 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} -2 \leq 2x \leq 7 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 3/5$$

$$D_{f(2x)} = [-1, 3/5]$$

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{x}{2}\right) = -x - 1$$

ب)



x	0	1
y	-1	-2

۲۲- علی می‌خواهد یک دوچرخه با قیمت بیش از ۴ میلیون از فروشگاه بخرد. این فروشگاه به مناسبت فرارسیدن سال نو در خریدهای بیش از ۴ میلیون، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. همچنین علی یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی نیز برای خرید دارد. با استفاده از تابع مرکب مشخص کنید کدام یک از راه‌های زیر به نفع علی است؟
 الف) اول از کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی استفاده کند.
 ب) اول از تخفیف نقدی و بعد کارت تخفیف استفاده کند.

« پاسخ »

تابع تخفیف نقدی به صورت $f(x) = x - 200000$ و تابع کارت تخفیف ۲۰ درصد به صورت $g(x) = \frac{80}{100}x$ است.

اگر از راه (الف) استفاده کند، تابع خرید علی به صورت زیر است:

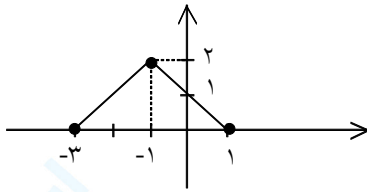
$$f(g(x)) = \frac{80}{100}x - 200000$$

اگر از راه (ب) استفاده کند، تابع خرید علی به صورت زیر است:

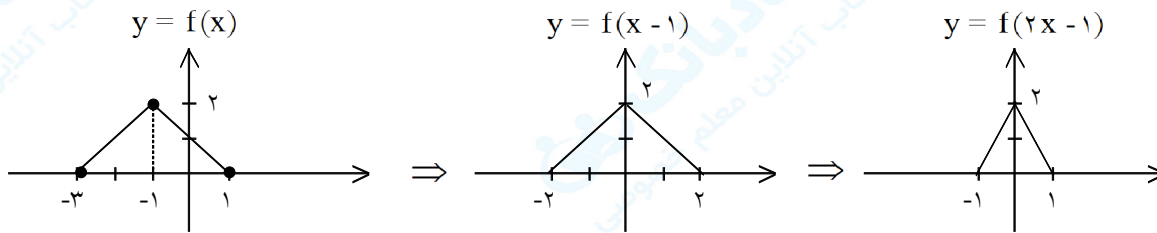
$$f(g(x)) = \frac{80}{100}(x - 200000) = \frac{80}{100}x - 160000$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، راه (الف) به نفع علی است: زیرا از $\frac{80}{100}$ قیمت دوچرخه مقدار بیشتری را کم می‌کند.

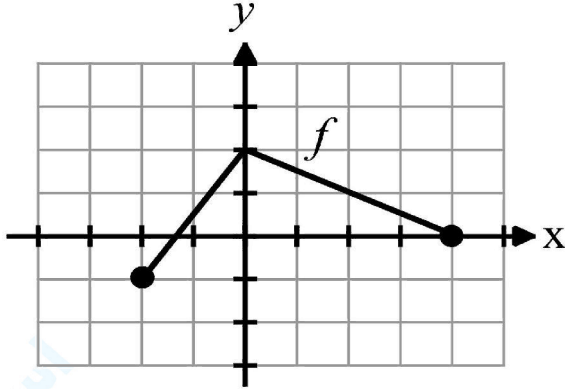
۲۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ را رسم کنید.



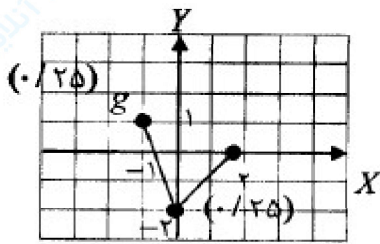
« پاسخ »



۲۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



« پاسخ »



$$D_g = [-1, 2] \quad (0/5)$$

$$R_g = [-2, 1] \quad (0/5)$$

۲۵- اگر $f(x) = x^2 - 11x + 30$ و $g(x) = 2x^2 + 7x + 11$ باشد، تمام ریشه‌های معادله‌ی $f \circ g(x) = 0$ را بنویسید.

« پاسخ »

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 11g(x) + 30 = 0 \Rightarrow (g(x) - 5)(g(x) - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 5 \\ g(x) = 6 \end{cases}$$

$$2x^2 + 7x + 11 = 6 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 7x + 11 = 5 \Rightarrow x = -2, x = -\frac{3}{2}$$

بنابراین معادله دارای چهار جواب است.

۲۶- اگر $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = x^2 + 7x + 9$ ، آنگاه تمام ریشه‌های حقیقی معادله $f \circ g(x) = 0$ را بنویسید.

« پاسخ »

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow (g(x))^2 + 4g(x) + 3 = 0 \Rightarrow (g(x) + 1)(g(x) + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 7x + 9 + 1)(x^2 + 7x + 9 + 3) = 0 \Rightarrow (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x + 5)(x + 3)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -5, x = -3, x = -4$$

۲۷- اگر $fog(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x - 1$ باشد، $f(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x - 1) = x^2 - 2x$$

$$f(x - 1) = \underbrace{x^2 - 2x + 1 - 1}_{\text{اتحاد مربع}} \Rightarrow f(x - 1) = (x - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(X) = X^2 - 1$$

۲۸- اگر $fog(x) = x^2 - 6x + 8$ و $f(x) = x^2 + 2x$ باشد $g(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x)$$

$$f(g(x)) = x^2 - 6x + 8$$

$$(g(x))^2 + 2g(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$\xrightarrow{+1} (g(x))^2 + 2g(x) + 1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 3)^2$$

$$g(x) + 1 = \pm(x - 3) \Rightarrow \begin{cases} g(x) + 1 = x - 3 \Rightarrow g(x) = x - 4 \\ g(x) + 1 = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \end{cases}$$

۲۹- دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه‌ی تابع gof را بدون تشکیل $(gof)(x)$ به دست آورید.

ب) ضابطه‌ی gof را به دست آورید.

پ) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

الف) $f(x) = x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x + 2} \Rightarrow D_g = [-2, +\infty)$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x - 1 \geq -2}_{x \geq -1}\} = [-1, +\infty)$$

ب) $(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 2} = \sqrt{x - 1 + 2} = \sqrt{x + 1}$

پ) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2 + 2}} = \frac{1}{2}$

۳۰- توابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{(x-1)}$ داده شده‌اند. دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

« پاسخ »

$$D_f = (4, +\infty) \quad (0/25), \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (0/25)$$

$$= \{ D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \mid x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq 1 \} \quad (0/25) \Rightarrow$$

$$D_{g \circ f} = (4, +\infty) - \{5\} \quad (0/25)$$

۳۱- برای دو تابع $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

« پاسخ »

$$f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\} \quad (0/25) \text{ هر زوج مرتب}$$

۳۲- اگر $f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ و $g = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 4), (5, 3)\}$ دو تابع باشند:
الف) مقدار $(3f-g)(-1)$ را حساب کنید.
ب) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

« پاسخ »

$$\text{الف) } (3f-g)(-1) = 3f(-1) - g(-1) = 3 - 0 = 3 \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } f \circ g = \{(1, 3), (2, 5)\} \quad (0/5)$$

۳۳- برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ بدون نوشتن ضابطه، دامنه $f \circ g$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad (0/25)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (0/25) \rightarrow \left\{ x \neq 0 \mid \frac{2}{x} \neq \pm 2 \right\} \quad (0/25)$$

$$\rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\} \quad (0/25)$$

مشابه مثال صفحه ۷۳

۳۴- دو تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ داده شده اند.

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت $(\frac{2f}{g})(5)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ (۰/۲۵) ، $D_g = [1, +\infty)$ (۰/۲۵) (صفحه ۶۳ و ۶۶)

$$D_{fog} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_f\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow$$

$$D_{fog} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow D_{fog} = (1, +\infty) \quad (۰/۲۵)$$

ب) $(fog)(x) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$ (۰/۵)

ج) $\frac{2f(5)}{g(5)} = \frac{2 \times \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5}$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۳۵- دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه گوف را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع $P(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

الف) $D_f = (-\infty, 1]$ (۰/۲۵) ، $D_g = [1, +\infty)$ (۰/۲۵) (صفحه ۶۳ و ۶۵)

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow D_{gof} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in [1, +\infty)\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow D_{gof} = (-\infty, 0] \quad (۰/۲۵)$$

$$D_p = \underbrace{D_f \cap D_g}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\{1\}}_{(۰/۲۵)}$$

ب)

$$P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P = \{(1, 0)\} \quad (۰/۲۵)$$

مجموعه سوالات استادبانک

۳۶- اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $(f-g)(4)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید.

« پاسخ »

الف) $3(f(4) - g(4)) = 3\left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{5} = -2 \cdot \frac{1}{5}$

ب)

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ D_g = [3, +\infty) \end{cases} \cdot \frac{1}{5}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1\} \cdot \frac{1}{5} = \{x \in [3, +\infty) \mid x \neq 4\} = [3, 4) \cup (4, +\infty) \cdot \frac{1}{5}$$

۳۷- دامنه‌ی $g \circ f$ را مشخص کنید. $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 1$

« پاسخ »

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

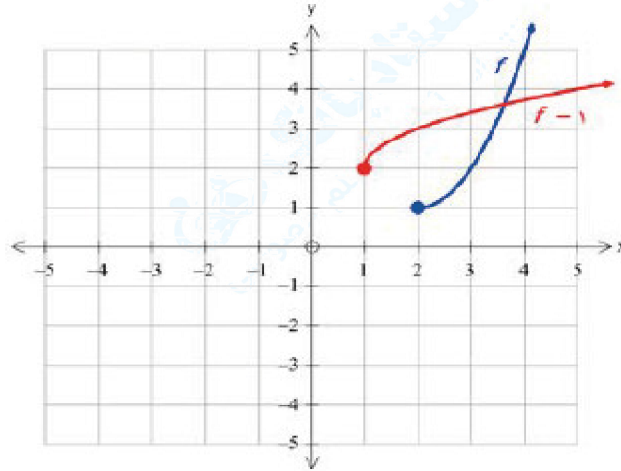
۳۸- با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آنرا بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \quad D_f = [2, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$y = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{y - 1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 1} + 2$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 2 \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$



۳۹- توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه‌ی آن‌ها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه‌ی وارون آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

« پاسخ »

الف) $f(x) = |x| \quad x \geq 0$

ب) $g(x) = -x^2 \quad x \leq 0$

پ) $h(x) = (x + 2)^2 - 1 \quad x \geq -2$

۴۰- در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-\sqrt{v}}{v}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{v}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8 + x^2$; $x \leq 0$

« پاسخ »

الف) $f \circ g(x) = f(g(x)) = -\frac{\sqrt{v}}{v} \left(-\frac{2x+6}{v} \right) - 3 = x + 3 - 3 = x$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{2 \left(\frac{-\sqrt{v}x}{v} - 3 \right) + 6}{v} = \frac{v\sqrt{v}x - 6 + 6}{v} = x$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{8 + x^2 - 8} = -\sqrt{x^2} = -|x| = -x$ $\xrightarrow{x \leq 0} -(-x) = x$

ب) $g \circ f(x) = g(f(x)) = \left(-\sqrt{x-8} \right)^2 + 8 = x - 8 + 8 = x$

۴۱- ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x-1}$

« پاسخ »

$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{-8y+3}{2} \Rightarrow -8y = 2x-3 \Rightarrow y = \frac{-2x+3}{8} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{8}$

$g(x) = -5 - \sqrt{3x-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -5 - \sqrt{3y+1} \Rightarrow -\sqrt{3y+1} = x+5$

$\Rightarrow 3y+1 = (x+5)^2 \Rightarrow 3y = (x+5)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{(x+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$

۴۲- درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

دو تابع $f(x) = \frac{-2x+6}{v}$ و $g(x) = \frac{-\sqrt{v}}{v}x - 3$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

« پاسخ »

درست ۰/۲۵

۴۳- تابع $y = \text{Log}_{\frac{1}{2}} x$ تابعی یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر

« پاسخ »

است - است

۴۴- اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آنرا به دست آورید.

« پاسخ »

ابتدا ضابطه خطی تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \\ (4, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{5-1}{4-2}(x-2) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

۴۵- تابع $f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-7, 18\}$ باشد.

« پاسخ »

$$f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$$

$$f^{-1} = f = \{(5, m^4 + 2), (4, n^3 + 1)\} \Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^4 + 2, n^3 + 1\}$$

اگر $\{m^4 + 2, n^3 + 1\} = \{-7, 18\}$ ، از آن‌که $m^4 + 2$ همواره مثبت است باید برابر با 18 و $n^3 + 1$ برابر با (-7) باشد، پس:

$$\begin{cases} m^4 + 2 = 18 \Rightarrow m^4 = 16 \Rightarrow m = \pm 2 \\ n^3 + 1 = -7 \Rightarrow n^3 = -8 \Rightarrow n^3 = (-2)^3 \Rightarrow n = -2 \end{cases}$$

۴۶- اگر $f(x) = 2x - 6$ و $g(x) = 5 + 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x-1}{g^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow y + 6 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+6}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+6}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$$

$$g(x) = 5 + 2x \Rightarrow y = 5 + 2x \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-5}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-5}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x-1}{g^{-1}(x)} \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{x+6}{2}} + \frac{3x-1}{\frac{x-5}{2}}$$

$$\begin{cases} \frac{x+6}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \Rightarrow D_h = [-6, +\infty) - \{5\} \\ x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \end{cases}$$

۴۷- اگر $g(x) = \left[\frac{7x}{3} \right]$ و $f = \{(2, m^2 + 3m), (5, 10), (2, 4), (5m, 11), (-4, 5)\}$ تابعی یک به یک و $(f+g)(m)$ مقدار را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است).

« پاسخ »

$$m^2 + 3m = 4 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{غ ق ق} \\ m = -4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m = -4} f = \{(2, 4), (5, 10), (2, 4), (-20, 11), (-4, 5)\}$$

$$(f+g)(m) \xrightarrow{m = -4} f(-4) + g(-4) = 5 + \left[\frac{-28}{3} \right] = 5 - 10 = -5$$

۴۸- اگر تابع خطی f دارای شیب k باشد به ازای چه مقدار k شیب تابع f^{-1} برابر $9k$ است. ($k \neq 0$)

« پاسخ »

$$f(x) = kx + b \Rightarrow y = kx + b \Rightarrow y - b = kx \Rightarrow \frac{1}{k}y - \frac{b}{k} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$$

در خود سوال گفته شده شیب تابع وارون $9k$ است. بنابراین:

$$\frac{1}{k} = 9k \Rightarrow 9k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

۴۹- ضابطه و دامنه‌ی وارون $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 36}{x - 9}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{9\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(x-9)} = x - 4$$

تابع در $(9, 5)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(5, 9)$ تعریف نشده است.

$$y = x - 4 \Rightarrow y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x + 4$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{5\}$$

۵۰- اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد و دامنه‌ی دو تابع $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ و $h(x) = \frac{x+7}{x^2+ax+b}$ برابر باشند، a و b را

حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

۵۱- یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$y = \sqrt{2x - 3} \quad (\text{الف})$$

$$y = \frac{x + 6}{3x - 4} \quad (\text{ب})$$

« پاسخ »

(الف)

$$\sqrt{2x_1 - 3} = \sqrt{2x_2 - 3} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

(ب)

$$\frac{x_1 + 6}{3x_1 - 4} = \frac{x_2 + 6}{3x_2 - 4}$$

$$3x_1x_2 + 18x_2 - 4x_1 - 24 = 3x_1x_2 + 18x_1 - 4x_2 - 24 \Rightarrow 22x_1 = 22x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

هر دو تابع یک به یک هستند.

۵۲- اگر $f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, -1), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

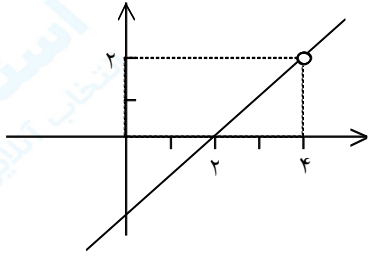
$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

۵۳- وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را رسم کنید و هم‌چنین دامنه و برد وارون تابع را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad (x \neq 2)$$

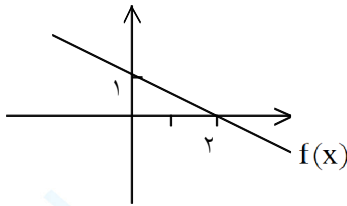
x	۰	۲	→ در تابع معکوس	x	۲	۴
y	۲	۴		y	۰	۲



با توجه به نمودار

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{4\} \\ R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\} \end{cases}$$

۵۴- با توجه به نمودار تابع خطی $f(x)$ ضابطه‌ی معکوس آن را بنویسید.



« پاسخ »

چون $f(x)$ یک تابع خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(2, 0) \Rightarrow a(2) + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times(-2)} -2y + 2 = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -2x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$$

۵۵- اگر $f(x) = 5 - 2x$ ، $[f^{-1}(10)]$ را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

« پاسخ »

$$y = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5 - y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{5 - x}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5 - x}{2} \Rightarrow [f^{-1}(10)] = [-2/5] = -3$$

۵۶- اگر تابع $f(x) = (b - 3)x^2 + 4x - b + 2$ در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد، $f^{-1}(3)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

برای آن که تابع در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد باید درجه ۲ نباشد بنابراین ضریب x^2 را صفر قرار می دهیم.

$$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 4x - 1$$

$$f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow 4a - 1 = 3 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

۵۷- اگر تابع $f = \{(1, a + 2b), (-2, 3), (2a - b, 3), (1, 4), (2, 5)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« پاسخ »

$$(1, a + 2b), (1, 4) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است}} a + 2b = 4 \quad (1)$$

$$(-2, 3), (2a - b, 3) \in f \xrightarrow{f \text{ تابعی یک به یک است}} 2a - b = -2 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow 2 \times \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow 5a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} 0 + 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$