

# استادبانک



نمونه سوالات همراه با جواب و

گام به گام کتاب‌های درسی

به طور کامل رایگان در

اپلیکیشن استادبانک

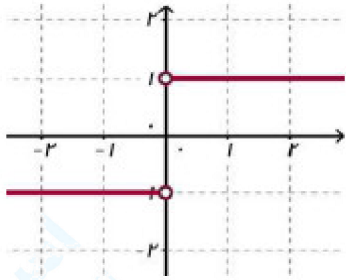
به جمع ده‌ها هزار کاربر اپلیکیشن رایگان استادبانک پیوندید.

[لینک دریافت اپلیکیشن نمونه سوالات استادبانک \(کلیک کنید\)](#)

\* برای مشاهده نمونه سوالات دانلود شده به صفحه بعد مراجعه کنید.

۱- اگر  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار  $f$  را رسم کنید. آیا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود است؟

« پاسخ »



$$f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$  را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

« پاسخ »

وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2(0) - 2 = -2$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0)^2 + 2 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

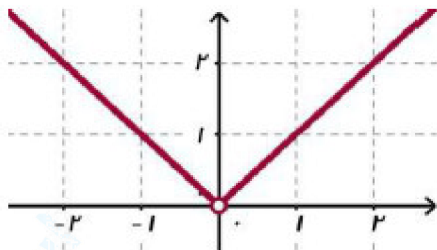
۳- آیا حد تابع مقابل در  $x = 2$  موجود است؟

« پاسخ »

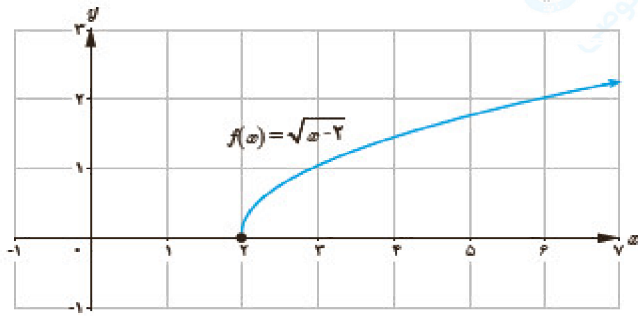
وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 3 = -1$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0$

۴- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم. آیا  $f$  در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ آیا  $f(0)$  موجود است؟

« پاسخ »



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



۵- درباره‌ی تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x-2}$  موارد زیر را در

صورت وجود محاسبه کنید:

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت)  $f(2)$

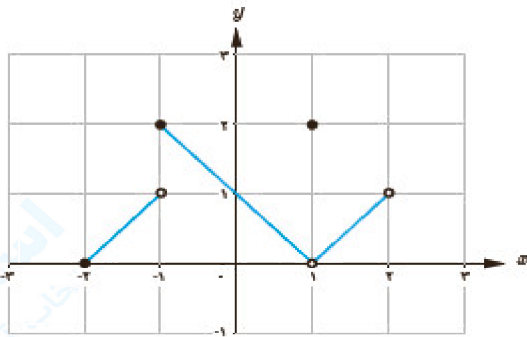
« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  وجود ندارد

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وجود ندارد

ت)  $f(2) = \sqrt{2-2} = 0$



۶- برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب)  $f(1) = 2$

پ)  $f(2) = 1$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وجود ندارد.

ح)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وجود ندارد.

« پاسخ »

الف) نادرست

ب) نادرست

ث) نادرست

چ) درست

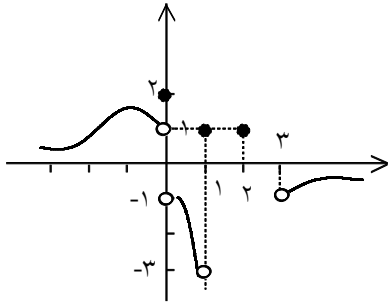
ب) درست

ت) درست

ج) درست

ح) درست

۷- با توجه به شکل مقابل حاصل موارد زیر را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  = حد راست و چپ متفاوت است) حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  = حد ندارد

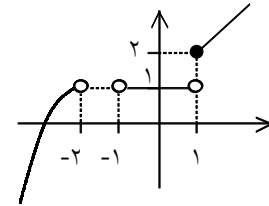
۸- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.

A)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

B)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

C)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

D)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



« پاسخ »

A)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

B)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

C)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  = حد ندارد

D)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  وجود ندارد  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

۹- آیا تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  در  $x = 0$  حد دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \quad (0/25)$$

خیر با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ ۰ تعریف نشده پس در  $x = 0$  حد ندارد. (۰/۵)

۱۰- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = a[x] + [x + 1]$  مفروض است. مقدار  $a$  را چنان بیابید که  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود است.

( [ ] نماد جزء صحیح است. )

« پاسخ »

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود است یعنی حد چپ و راست تابع در  $x = 1$  با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x + 1]) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x] + [x + 1]) = 0 + 1 = 1$$

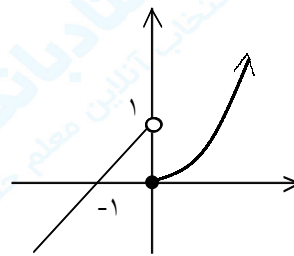
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

۱۱- ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$  را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، وجود حد تابع را در  $x = 0$  بررسی کنید.

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{حد ندارد}$$



# مجموعه سوالات استادبانک

۱۲- برای تابع  $f(x) = x + [x]$ :

الف) نمودار تابع در بازه  $x \in [-1, 1]$  را رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)							

ج) آیا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود است؟ چرا؟

« پاسخ »

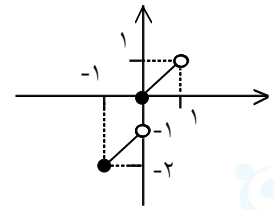
الف)

$$-1 \leq x < 0, \quad [x] = -1 \rightarrow y = x - 1$$

x	-1	۰
f(x)	-2	-1

$$0 \leq x < 1, \quad [x] = 0 \rightarrow y = x$$

x	۰	۱
f(x)	۰	۱



x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱

ب)

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ آن برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{حد ندارد}$$

# مجموعه سوالات استادبانک

۱۳- در تابع  $f(x) = (-1)^{[x]}$  (الف) تابع را در بازه‌ی  $x \in [0, 2)$  رسم کنید. (ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

(ج) آیا حد تابع در  $x = 1$  موجود است؟ چرا؟

« پاسخ »

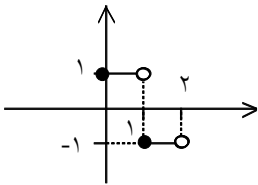
(الف)

$$0 \leq x < 1 \xrightarrow{[x] = 0} y = (-1)^0 = 1$$

x	۰	۱
y	۱	۱

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{[x] = 1} y = (-1)^1 = -1$$

x	۱	۲
y	-۱	-۱



x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱

(ب)

(ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ در  $x = 1$  برابر نیست.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{موجود نیست}$$

# مجموعه سوالات استادبانک

۱۴- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 1-x & -2 \leq x < -1 \\ x & -1 < x \leq 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)							

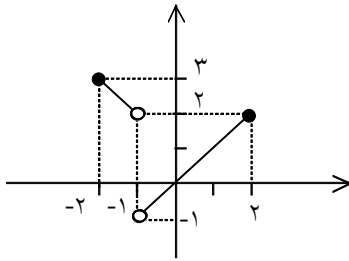
ج) آیا  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وجود دارد؟ چرا؟

« پاسخ »

(الف)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & -2 \leq x < -1 \\ x & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

x	-۲	-۱
y	۳	۲
x	-۱	۲
y	-۱	۲



ب)

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	تعریف نشده	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹

ج) حد ندارد - زیرا حد راست و چپ برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \text{موجود نیست}$$



۱۵- مقدار  $a$  را طوری بیابید که تابع زیر در  $x = 2$  دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x \geq 2 \\ \frac{ax}{x-3} & x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

برای آن که در  $x = 2$  دارای حد باشد باید حد راست و چپ در  $x = 2$  برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax}{x-3} = \frac{2a}{-1} = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 10 = -2a \Rightarrow a = -5$$

۱۶- نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x > -2 \\ x^2 + 2x & x \leq -2 \end{cases}$  را رسم کنید. حد چپ و راست تابع  $f$  را در  $x = -2$  به دست آورید. آیا تابع  $f$  در  $x = -2$  حد دارد؟ چرا؟

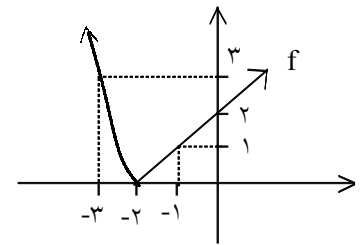
« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x > -2 \\ x^2 + 2x & x \leq -2 \end{cases}$$

$x$	$-2$	$-1$
$y$	$0$	$1$

$x$	$-2$	$-3$
$y$	$0$	$3$

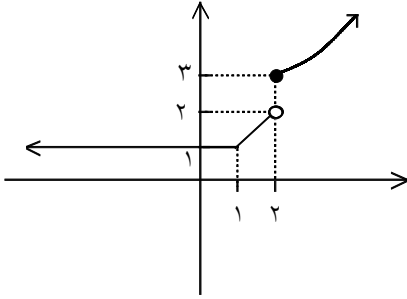


$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

تابع در  $x = -2$  دارای حدی برابر صفر است. زیرا حد راست و چپ برابر صفر است.

۱۷- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 3f(2)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 3f(2) = 1 + 2 - 3(3) = -6$$

۱۸- نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$  را رسم کنید. حد چپ و راست تابع  $f$  را در  $x = 1$  به دست آورید. آیا تابع  $f$  در  $x = 1$  حد دارد؟ چرا؟

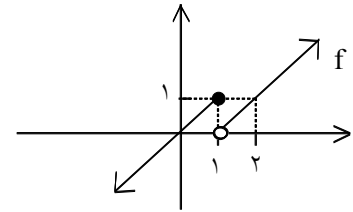
« پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$$

$x$	$1$	$2$
$y$	$0$	$1$

$x$	$1$	$0$
$y$	$1$	$0$

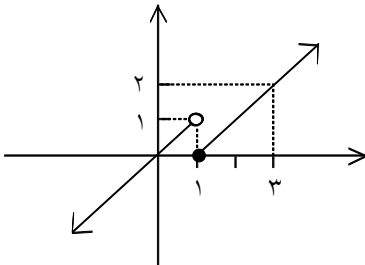


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{حد ندارد}$$

تابع در  $x = 1$  حد ندارد، زیرا حد راست و چپ در  $x = 1$  برابر نیست.

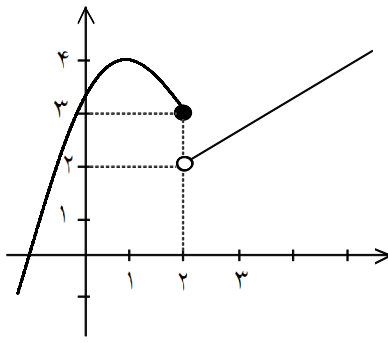
۱۹- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(3)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(3) = 0 - 1 + 2 = 1$$



۲۰- با استفاده از نمودار زیر حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

« پاسخ »

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$  (۰/۲۵)

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  (۰/۲۵)

ج) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  (۰/۲۵)

۲۱- مقادیر  $a$  و  $b$  را در  $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq -1 \\ ax^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$  طوری تعیین نمایید که  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$  گردد.

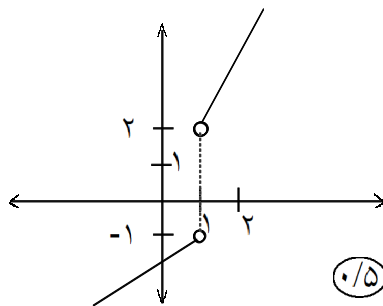
« پاسخ »

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = -a + b$  (۰/۲۵)

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 - 1) = a(-1)^2 - 1 = a - 1$  (۰/۲۵)  $\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$  (۰/۲۵)

۲۲- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ را در نقطه‌ی  $x = 1$  بررسی کنید.

$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$



« پاسخ »

حد چپ =  $-1$  (۰/۲۵)

حد راست =  $2$  (۰/۲۵)

$-1 \neq 2$  : حد وجود ندارد. (۰/۲۵)

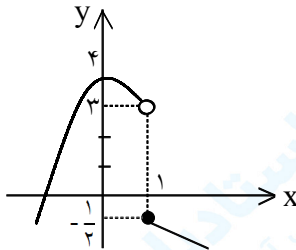
(۰/۵)

۲۳- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$  را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در  $x = 1$  بررسی کنید.

« پاسخ »

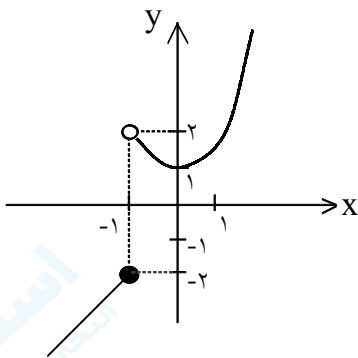
رسم خط (۰/۲۵)

رسم سهمی (۰/۷۵)



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\frac{1}{2} \quad (0/25) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 3 \quad (0/25) \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$  تابع در  $x = 1$  حد ندارد (۰/۲۵)



۲۴- شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

د)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

« پاسخ »

الف) ۲ (۰/۲۵)

ب) -۲ (۰/۲۵)

ج) ۱ (۰/۲۵)

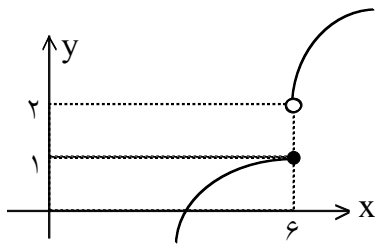
د) حد ندارد (۰/۲۵)

۲۵- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2 & x < -1 \\ 2ax^2 & x > -1 \end{cases}$  مفروض است. عدد  $a$  را چنان بیابید که تابع در  $x = -1$  حد داشته باشد.

« پاسخ »

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^3 - 2) = -a - 2 \quad (0/5) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2ax^2) = 2a \quad (0/25) \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow 2a = -a - 2 \quad (0/25) \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \quad (0/25)$



۲۶- با توجه به نمودار تابع  $f(x)$ ، حاصل هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

« پاسخ »

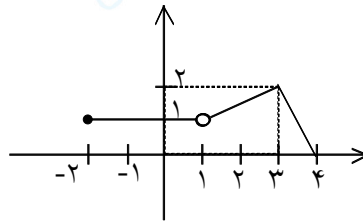
الف)  $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 2$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$  وجود ندارد

ب)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$

۲۷- با توجه به نمودار داده شده به سؤال روبرو پاسخ دهید.



« پاسخ »

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1$

۲۸- نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = [x] + [-x]$  را رسم نموده و حدود زیر را حساب کنید. (در صورت وجود)

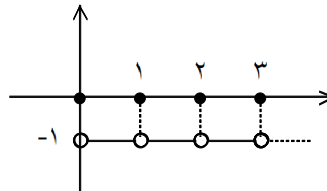
ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

« پاسخ »

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

۲۹- حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$x \rightarrow 2$

« پاسخ »

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x}}{\log_2^x - \log_2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log_2^x)^2 - 1}{\log_2^x (\log_2^x - 1)}$$

$x \rightarrow 2$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{\log_2^x (\log_2^x - 1)} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$x \rightarrow 2$

روش دوم (هویتال):

$$\log_2^x = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{t(t-1)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t} = \frac{2}{2} = 1$$

۳۰- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

$x \rightarrow 1$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6} = \frac{0.25}{0.25}$$

$x \rightarrow 1$

$x \rightarrow 1$

$0.25$

$0.25$

$0.25$

۳۱- در هریک از حالت‌های زیر درباره‌ی حد تابع  $f + g$  چه می‌توان گفت؟  
 الف) اگر توابع  $f$  و  $g$  هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند  $a$  حد نداشته باشند.  
 ب) اگر تابع  $f$  در  $a$  حد داشته باشد ولی تابع  $g$  در  $a$  حد نداشته باشد.

« پاسخ »

الف) حد  $f + g$  تابع وجود ندارد.  
 ب) حد  $f + g$  تابع وجود ندارد.

۳۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$  حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)}$

« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3 + 0 = 3$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5 = (\lim_{x \rightarrow 2} h(x))^5 = (-1)^5 = -1$

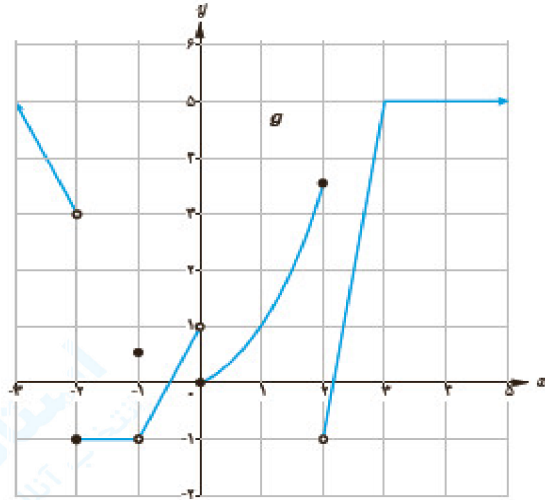
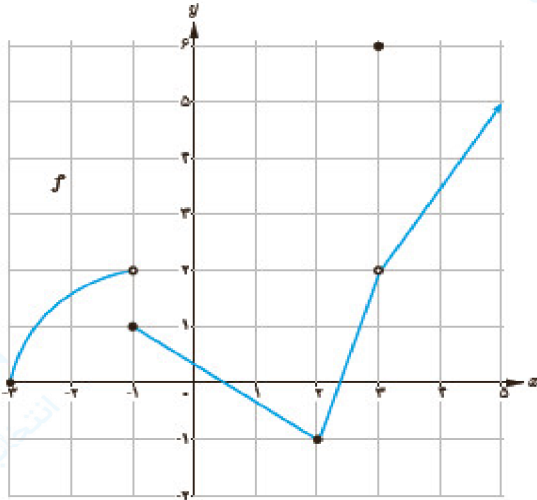
پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$  وجود ندارد

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{0}{3} = 0$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 5h(x)} = \frac{3\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 5\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}$   
 $= \frac{3 \times 3}{0 - 5(-1)} = \frac{9}{5}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{1}{-1} = -1$

۳۳- با استفاده از قوانین حد و نمودارهای  $f$  و  $g$  حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



(ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(ت)  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

(ح)  $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$

(ب) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(ت)  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

(ج) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

(ح) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

(ث)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$

(خ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

« پاسخ »

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$

(ث) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

(خ) وجود ندارد  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$



۳۴- حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$x \rightarrow 3$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 3$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار مقادیر زیر را حساب کنید.

$$h(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

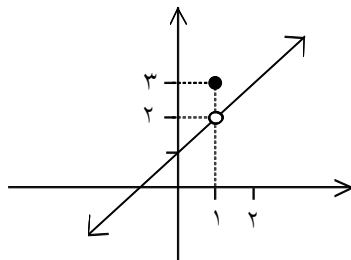
$$x \rightarrow 1$$

« پاسخ »

الف)

$$x \neq 1 \Rightarrow h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \Rightarrow h(x) = x + 1$$

x	1	2
y	2	3



$$h(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1$$

ب)

۳۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x + 2| - |4x - 1|}{x^2 - 1}$

« پاسخ »

(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = -3 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} = \text{حد ندارد}$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

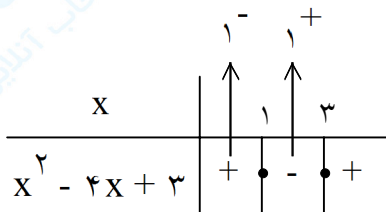
۳۷- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^3 - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x + 5| - |8x - 1|}{x^2 - 1}$

« پاسخ »

الف) بهتر است برای تعیین علامت  $x^2 - 4x + 3$  در همسایگی  $x = 1$  از جدول تعیین علامت استفاده کنیم.

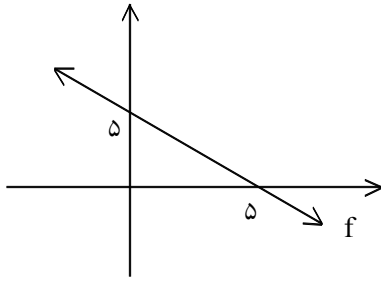


$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2}{3} \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^3 - 1} = \text{حد ندارد}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5 - (8x - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-6}{2} = -3$

(ب)



۳۸- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

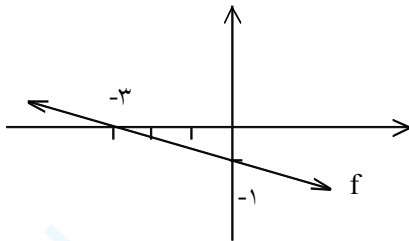
$f$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(0, 5)$  و  $B(5, 0)$  است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 5) \Rightarrow a(0) + b = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$B(5, 0) \Rightarrow a(5) + b = 0 \xrightarrow{b=5} a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{-(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{-1} = -5$$



۳۹- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x)}{x^3 + 1}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(0, -1)$  و  $B(-3, 0)$  است.

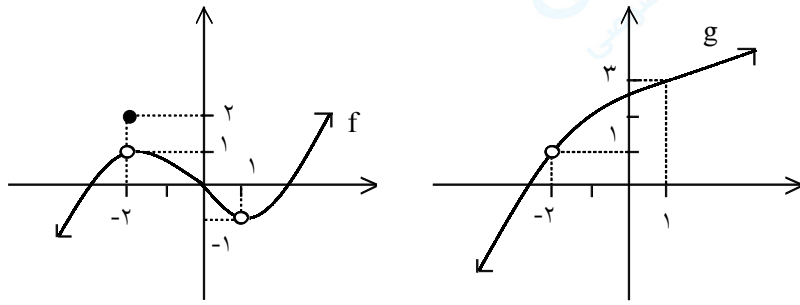
$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(-3, 0) \Rightarrow a(-3) + b = 0 \xrightarrow{b=-1} -3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 1 \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{3}x \xrightarrow{\times(-3)} -3y - 3 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -3x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -3x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3}{x^2 - x + 1} = \frac{-3}{1 + 1 + 1} = -1$$



۴۰- نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر است:  
حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x))$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - 3g(x))$

« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x)) = 2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2(-1) - 3 = -5$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - 3g(x)) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) - 3\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 1 - 3(1) = -2$

۴۱- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x])$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+7}{\sqrt{x+1}}$

د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

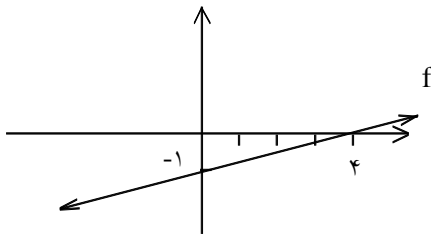
« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+7}{\sqrt{x+1}} = \frac{8+7}{\sqrt{8+1}} = \frac{15}{3} = 5$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x]) = 2 + 2 = 4$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-1} = \frac{8}{3}$

د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x + \sin^2 x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$   
 $= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$



۴۲- اگر نمودار تابع خطی  $f(x)$  به صورت زیر باشد،  
 $\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) - f^{-1}(x))$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f$  یک تابع خطی است. بنابراین داریم:

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(4, 0) \Rightarrow a(4) + b = 0 \xrightarrow{b = -1} 4a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x - 1$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{4}x \xrightarrow{\times 4} 4y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = 4x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) - f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 8} f(x) - \lim_{x \rightarrow 8} f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{4}(8) - 1\right) - (32 + 4) = 1 - 36 = -35$$

۴۳- اگر  $f(x) = (2x^2 + ax + b)[x]$  در  $x = -3$  و  $x = 7$  دارای حد باشد،  $a$ ،  $b$  را حساب کنید. [ ] نماد جزء صحیح است

« پاسخ »

باید معادله  $2x^2 + ax + b = 0$  به ازای  $x = 7$  و  $x = -3$  صفر شود. بنابراین:

$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \\ x = 7 \Rightarrow x - 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times} (x + 3)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 8x - 42 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -42 \end{cases}$$

۴۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{Lim } \sqrt{x} \quad (\text{ب})$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\text{Lim } 2 \sin x + 1 \quad (\text{الف})$$

$$x \rightarrow \frac{5\pi}{6}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) } \text{Lim}_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}} 2 \sin x + 1 &= 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1 = 2 \times \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \text{Lim}_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \text{Lim}_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \text{حد چپ ندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \text{حد ندارد}$$

۴۵- اگر  $f(x) = (3x^2 - ax + 2b - 1)[x]$  در  $x = 1$  و  $x = 5$  دارای حد باشد،  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

باید معادله  $3x^2 - ax + 2b - 1 = 0$  به ازای  $x = 7$  و  $x = -3$  صفر شود بنابراین:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \\ x = 5 \Rightarrow x - 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times} (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 18x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -18 \Rightarrow a = 18 \\ 2b - 1 = 15 \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

۴۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3} &\times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} = \text{Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}) + 3}{(x+8-9)(\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}} &\times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{(x+5-1)(x + \sqrt{x+6})}{(x^2 - x - 6)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x + \sqrt{x+6})}{x-3(x+2)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} = \frac{6}{5 \times 12} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$



۴۷- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} &= \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\text{ب) Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}$$

$$= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{x+5-8}{(x-3)(x+3)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)}$$

$$= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72}$$

$x \rightarrow 3$

۴۸- حد تابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$$

« پاسخ »

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot \frac{0}{25}}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2) \cdot \frac{0}{25}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{0}{25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5}$$

۴۹- حد زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \therefore \rightarrow \text{رفع ابهام} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\overbrace{5-x}^{5-x}}{(x-5)(x-1)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(x-1)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4 \times 4} = \frac{-1}{16} \end{aligned}$$

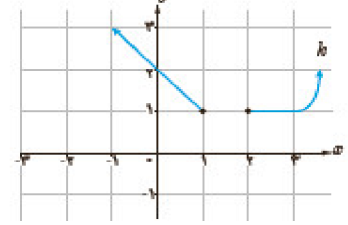
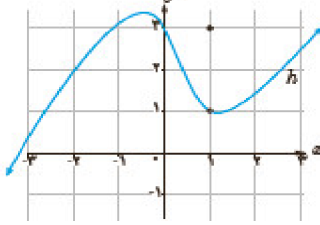
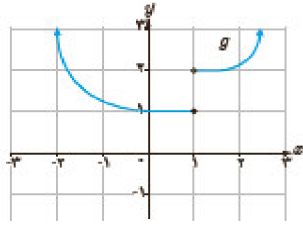
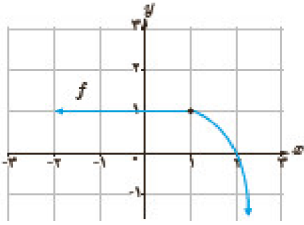
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt[3]{28-x}}{x^2 - 1}$$

۵۰- حاصل حد زیر را به دست آورید:

« پاسخ »

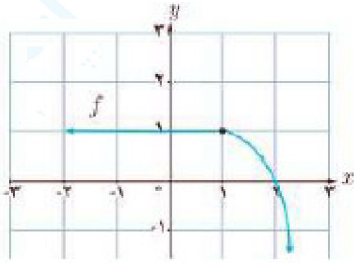
$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{28-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\sqrt[3]{27}}{2} = \frac{3}{2}$$

۵۱- کدام یک از توابع زیر در  $x=1$  پیوسته است؟



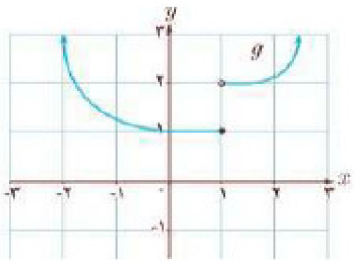
« پاسخ »

تابع  $f(x)$  در  $x=1$  پیوسته است زیرا:



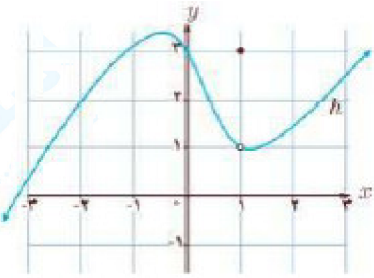
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

تابع  $g(x)$  در  $x=1$  ناپیوسته است زیرا:



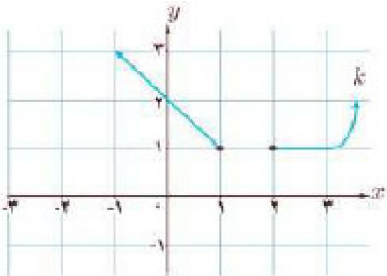
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

تابع  $h(x)$  در  $x=1$  ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$$

تابع  $k(x)$  در  $x=1$  ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) \text{ وجود ندارد , } \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 1$$

# مجموعه سوالات استادبانک

۵۲- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & x \leq 0 \\ x^2+2 & x > 0 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

« پاسخ »

تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0)^2 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0) + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) = -2(0) + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

تابع  $f(x)$  در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است زیرا:

۵۳- مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 1 \\ x^2 - 3x + 2 & x = 1 \end{cases}$  پیوسته باشد.

« پاسخ »

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(1) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2 \Rightarrow a + 2 = -2 \Rightarrow a = -4$$

۵۴- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} & ; x > 2 \\ 2a + x + 1 & ; x = 2 \\ 2b + 5 & ; x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$f(2) = 2a + 2 + 1 = 2a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} = \frac{2 + 2b}{2} = b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b + 5$$

$$2a + 3 = b + 1 = 2b + 5 \Rightarrow b + 1 = 2b + 5 \Rightarrow b = -4$$

$$2a + 3 = 2b + 5 \Rightarrow 2a + 3 = -3 \Rightarrow a = -3$$

۵۵- در تابع زیر  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع در  $x = 1$  پیوسته باشد. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

« پاسخ »

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

$$k(1) = (1 - a)[1] = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (1)^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = 0$$

$$\text{چون } k(1) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} k(x) \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

۵۶- اگر تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر در  $x = 2$  پیوسته باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + ax & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ b[x] - 3 & x < 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

$x = 2$  در شرط پیوستگی در  $x = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

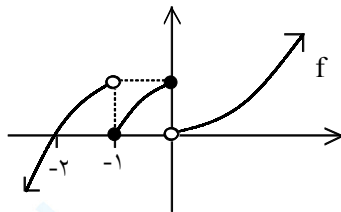
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + ax = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} + ax = 4 + 2a$$

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} b[x] - 3 = b - 3$$

$$b - 3 = 3 \Rightarrow b = 6$$

$$4 + 2a = 3 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$



۵۷- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟ چرا؟

الف)  $f$  در بازه  $[0, +\infty)$  پیوسته است.

ب)  $f$  در بازه  $[-1, 0]$  پیوسته است.

« پاسخ »

الف) نادرست است. زیرا  $f$  در  $x = 0$  پیوستگی راست ندارد.

ب) درست است. زیرا  $f$  در بازه  $(-1, 0)$  پیوسته و در  $x = -1$  پیوستگی راست و  $x = 0$  پیوستگی چپ دارد.

۵۸- در تابع مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a|x| + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 2ax + 2 & x > 1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2ax + 2 &= 1 + 2a + 2 = 3 + 2a = f(1) \text{ (۰/۵)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} a|x| + 1 &= a + 1 \text{ (۰/۲۵)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 + 2a = a + 1 \Rightarrow a = -2 \text{ (۰/۲۵)}$$

۵۹- مقدار  $a$  را طوری بیابید که تابع زیر در  $x = 1$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{x-1} & \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \quad (0.25) \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (0.25)$$

۶۰- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ a + 1 & x = 0 \\ [x + 2] + b & x < 0 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2 \quad (0.5)$$

$$f(0) = a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x + 2] + b = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + 2 + b = -1 + 2 + b = 2 \Rightarrow b = 1 \quad (0.25)$$

(0.25)