

# استادبانک



نمونه سوالات همراه با جواب و

گام به گام کتاب‌های درسی

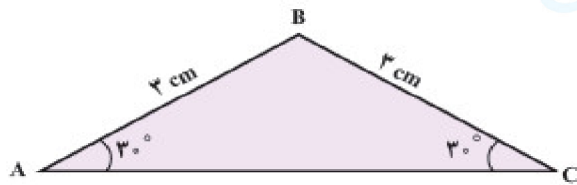
به طور کامل رایگان در

اپلیکیشن استادبانک

به جمع ده‌ها هزار کاربر اپلیکیشن رایگان استادبانک پیوندید.

[لینک دریافت اپلیکیشن نمونه سوالات استادبانک \(کلیک کنید\)](#)

\* برای مشاهده نمونه سوالات دانلود شده به صفحه بعد مراجعه کنید.



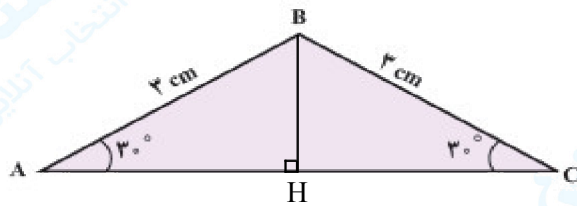
۱- مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

« پاسخ »

روش اول (با استفاده از ماشین حساب):

$$\hat{B} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{9}{2} \times 0.866 = 3.897$$



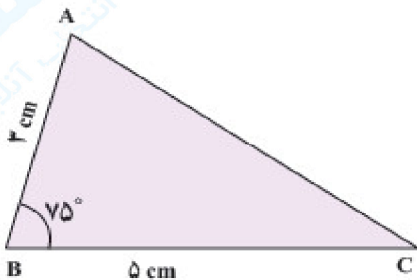
روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب):

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \times AB \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2 \times S_{\triangle ABH} = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3.897$$

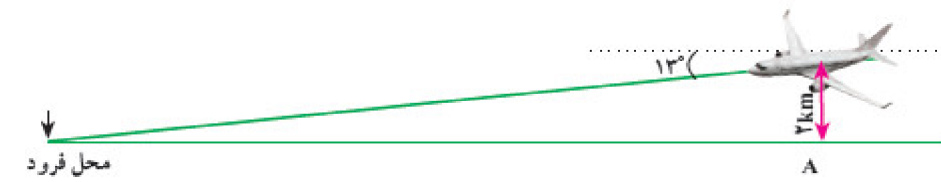
۲- فرض کنید  $\sin 75^\circ \approx 0.96$ . مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



« پاسخ »

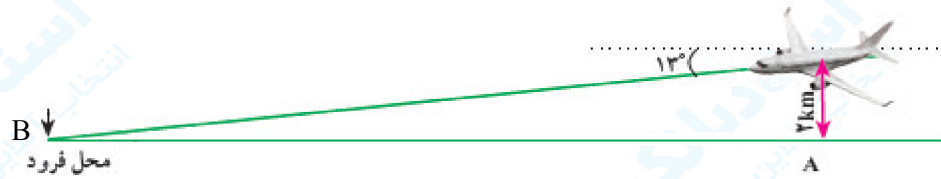
$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0.96 = 7.2$$

۳- یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود  $13^\circ$  باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید.

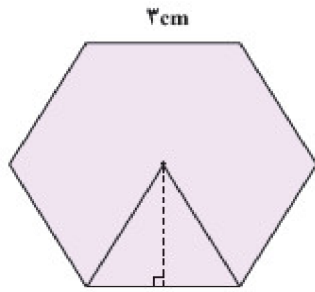


« پاسخ »

طبق قضیه‌ی خطوط موازی، زاویه‌ی B نیز  $13^\circ$  درجه است.



$$\operatorname{tg} B = \frac{2}{AB} \xrightarrow{B = 13^\circ} 0.23 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{0.23} = 8.695$$

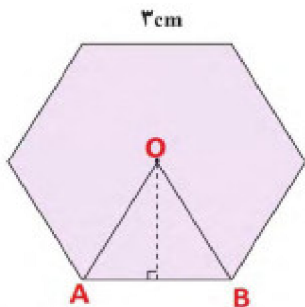


۴- مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

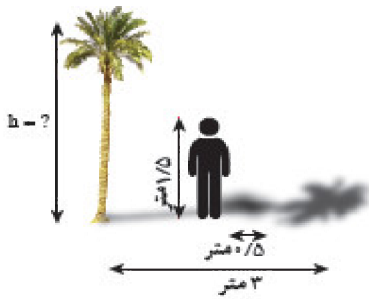
مطابق شکل، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع

$$\left. \begin{array}{l} OA = 3 \\ \hat{A} = 60^\circ \end{array} \right\} \text{ است. بنابراین:}$$



$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times AB \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

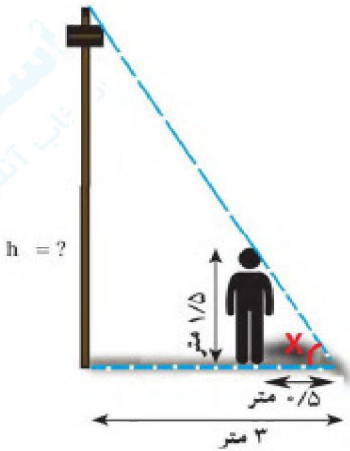
$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = 6 \times S_{AOB} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



۵- علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چه قدر است؟

« پاسخ »

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی کوچک  $\text{tg} x = \frac{1/5}{0/5}$  و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی بزرگ  $\text{tg} x = \frac{h}{3}$  می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:  $\frac{1/5}{0/5} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 9$ . یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است.

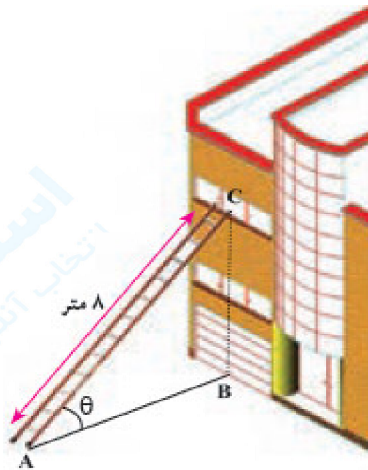


۶- مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین  $\theta = 30^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چه قدر است؟

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48}$$



« پاسخ »

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48}$$

۷- در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی  $B$  را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع  $AC$  را رسم کنید و آن را  $BH$  بنامید.

ب) طول  $BH$  را با استفاده از سینوس زاویه‌ی  $A$  به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه‌ی  $۶۵^\circ$ ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$(\sin 65^\circ \simeq 0/9)$$



« پاسخ »

$$\widehat{B} + 60^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 55^\circ$$

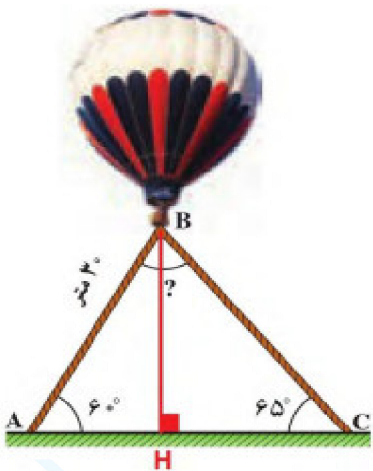
الف)

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

ب)

پ)

$$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow 0/906 = \frac{15\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{15\sqrt{3}}{0/906} \simeq 28/6665$$



۸- می‌خواهیم مساحت مثلث  $ABC$  در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به این که  $\sin 50^\circ \simeq 0/76$ ، داریم:

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \simeq \dots$$

ب) با توجه به قسمت الف داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} AH \times BC \simeq \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \simeq \dots$$

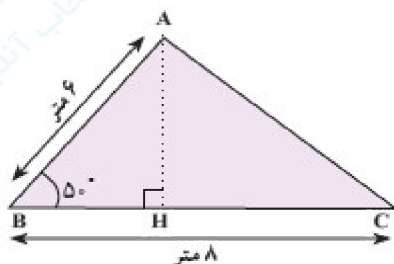
« پاسخ »

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \simeq 0/76 \times 6 = 4/56$$

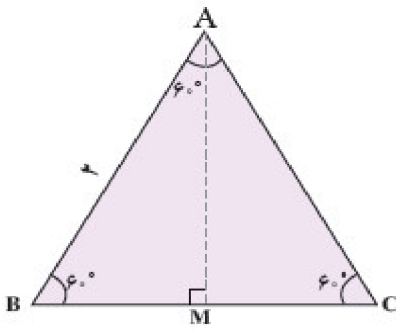
الف)

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} AH \times BC \simeq \frac{1}{2} \times 4/56 \times 8 = 18/24$$

ب)



۹- به کمک شکل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $۳۰^\circ$  و  $۶۰^\circ$ ، جدول زیر را کامل کنید. (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید)



مقدار	$۳۰^\circ$	$۴۵^\circ$	$۶۰^\circ$
Sin A		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
Cos A		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
tg A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
Cotg A	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

« پاسخ »

مقدار	$۳۰^\circ$	$۴۵^\circ$	$۶۰^\circ$
Sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
Cotg A	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

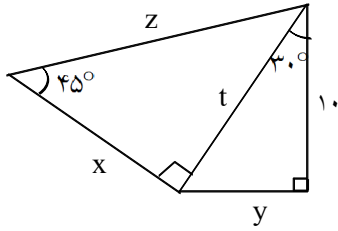
$$\frac{\text{Cotg} 60^\circ - \text{tg} 30^\circ + 5 \text{Cotg} 45^\circ}{8 \text{Cotg} 45^\circ - \text{Sin} 90^\circ + 5 \text{tg} 45^\circ} =$$

۱۰- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 5}{8 - 1 + 5} = \frac{5}{12}$$

۱۱- در شکل زیر طول اضلاع  $t$ ،  $z$ ،  $y$  و  $x$  را به دست آورید.

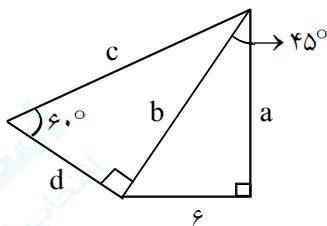


« پاسخ »

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{Cos} 30^\circ = \frac{10}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{t} \Rightarrow t = \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{t}{x} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{Sin} 45^\circ = \frac{t}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{z}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{6}}{6} = \frac{20\sqrt{6}}{3}$$



۱۲- در شکل مقابل  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\operatorname{Sin} 45^\circ = \frac{6}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{b} \Rightarrow b = \frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Cos} 45^\circ = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{6\sqrt{2}} \Rightarrow a = 6$$

$$\operatorname{Sin} 60^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{c} \Rightarrow \sqrt{3}c = 12\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$$

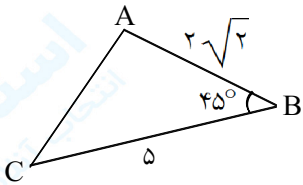
$$\operatorname{Cos} 60^\circ = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{4\sqrt{6}} \Rightarrow d = 2\sqrt{6}$$

۱۳- طول دو ضلع مثلثی  $2\sqrt{3}$  و ۴ و زاویه‌ی بین این دو ضلع  $60^\circ$  است. مساحت این مثلث را به دست آورید.

« پاسخ »

۱ نمره

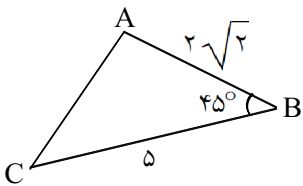
$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(4) \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$



۱۴- مساحت مثلث شکل مقابل را بیابید. (فرمول و راه‌حل نوشته شود).

« پاسخ »

۱/۵ نمره



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} c \times a \times \sin B$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 5 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

۱۵- مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{\cos^2(45^\circ) - 3 \sin(30^\circ)}{5 \tan^2(45^\circ) + 5 \cos(60^\circ)}$$

« پاسخ »

$$A = \frac{\cos^2(45^\circ) - 3 \sin(30^\circ)}{5 \tan^2(45^\circ) + 5 \cos(60^\circ)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)}{5(1)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{5 + \frac{5}{2}} = \frac{-\frac{2}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{-2}{15}$$



۱۶- اگر  $x$  زاویه‌ی حاده و  $\cos x = \frac{3}{5}$  باشد،  $\sin x$  و  $\tan x$  را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

۱۷- مقدار عددی عبارت  $\frac{2\operatorname{tg}45^\circ - 3\cos 180^\circ}{(\sin 30^\circ \cos 60^\circ) + (\cos 30^\circ \sin 60^\circ)}$  را بدست آورید.

« پاسخ »

$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$180^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

$$\Rightarrow \frac{2(1) - 3(-1)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{5}{1} = 5$$

۱۸- اگر  $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد مطلوبست محاسبه‌ی سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$ .

« پاسخ »

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} \Rightarrow y = -5, x = 12$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} \Rightarrow r = 13$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{12}{13}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-12}{5}$$

راهنمایی: در ربع چهارم  $x > 0$  و  $y < 0$  می‌باشد.

۱۹- اگر  $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ,  $r = 10$  و انتهای کمان  $\theta$  در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\theta$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \pm 8$$

چون انتهای کمان در ربع اول است پس  $y = 8$  قابل قبول است.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

۲۰- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$  مطلوب است محاسبه‌ی سایر نسبت‌های مثلثاتی کمان  $\alpha$ .

« پاسخ »

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 4, r = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm 3$$

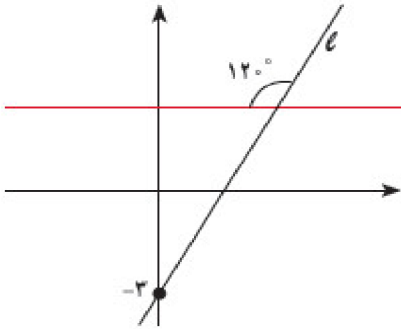
چون  $\alpha$  در ربع دوم است پس  $x < 0$  یعنی  $x = -3$  قابل قبول است. پس داریم:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

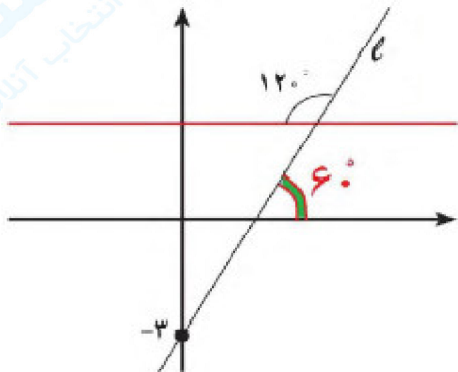
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

۲۱- با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط  $L$  را به دست آورید.



« پاسخ »



$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, (0, -3) \Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0) \\ \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

۲۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $45^\circ$  است و نقطه‌ی  $(0, 2)$  روی آن قرار دارد.

« پاسخ »

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 2$$

۲۳- حدود زاویه‌ی  $\theta$  را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف)  $\operatorname{Sin} \theta > 0, \operatorname{Cos} \theta > 0$       ب)  $\operatorname{Sin} \theta < 0, \operatorname{Cos} \theta > 0$

« پاسخ »

ب) ربع چهارم

الف) ربع اول

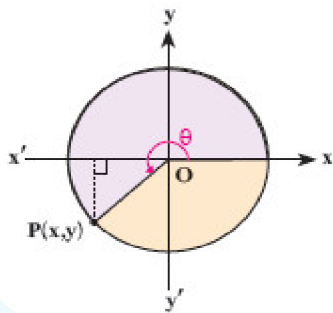
۲۴- در هریک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  (در ربع چهارم)      ب)  $\sin \beta = \frac{-1}{2}$  (در ربع سوم)

« پاسخ »

الف)  $x = \frac{3}{5} \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = -\frac{4}{5}$   
 $\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$

ب)  $y = -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\Rightarrow \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$



۲۵- فرض کنید نقطه‌ی P روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد به طوری که  $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

می‌دانیم  $\theta$  در ربع سوم قرار دارد، بنابراین  $\sin \theta = \dots$ .  
 الف) مختصات نقطه‌ی P را به دست آورید.  
 ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\theta$  را به دست آورید.

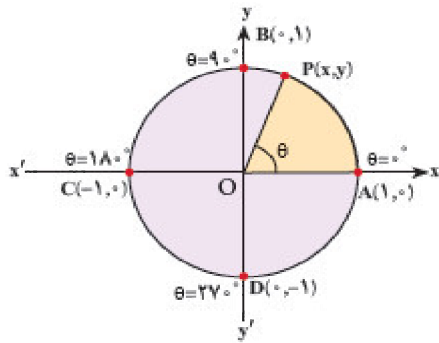
« پاسخ »

$y = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\operatorname{Cot} \theta = \frac{x}{y} = 1, \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = 1$

الف)

ب)



- ۲۶- (۱) در دایره‌ی مثلثاتی روبه‌رو اگر  $\theta = 90^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.  
 (۲) اگر  $\theta = 180^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.  
 (۳) اگر  $\theta = 270^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

« پاسخ »

(۱)  $90^\circ$  روی نقطه‌ی  $B(0, 1)$  واقع است بنابراین:

$$\text{tg } 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \text{، تعریف نشده ، } \text{Cos } 90^\circ = x_B = 0 \text{ ، } \text{Sin } 90^\circ = y_B = 1$$

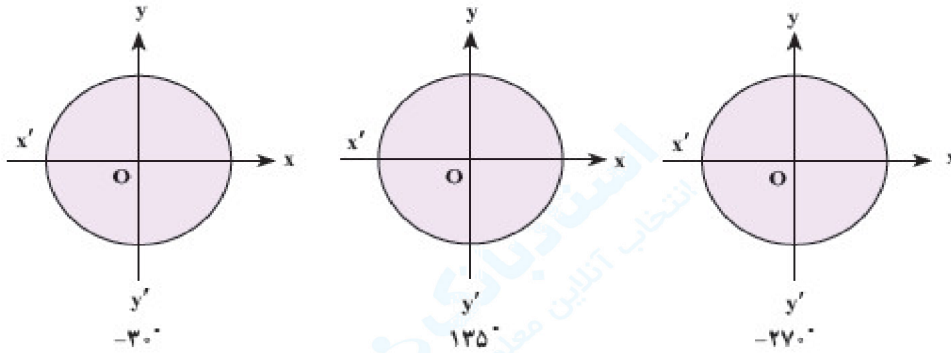
(۲)  $180^\circ$  روی نقطه‌ی  $C(-1, 0)$  واقع است بنابراین:

$$\text{tg } 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \text{ ، } \text{Cos } 180^\circ = x_C = -1 \text{ ، } \text{Sin } 180^\circ = y_C = 0$$

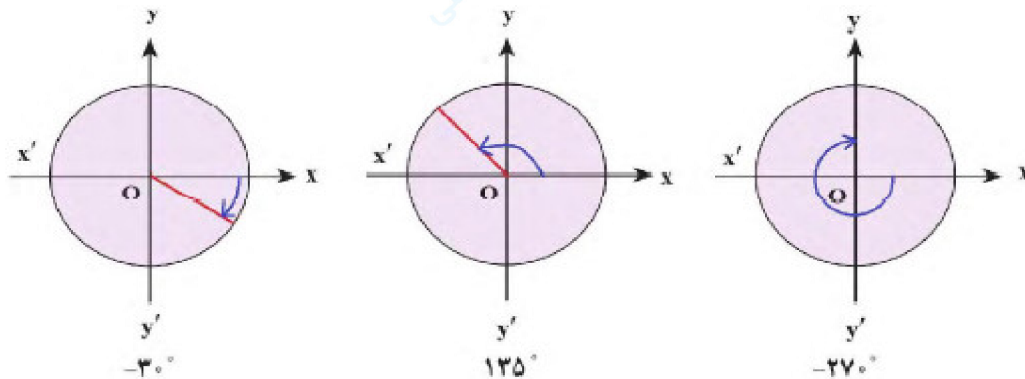
(۳)  $270^\circ$  روی نقطه‌ی  $D(0, -1)$  واقع است بنابراین:

$$\text{tg } 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{، تعریف نشده ، } \text{Cos } 270^\circ = x_D = 0 \text{ ، } \text{Sin } 270^\circ = y_D = -1$$

۲۷- هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



« پاسخ »

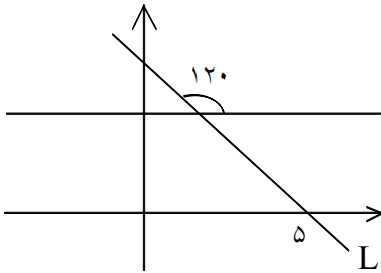
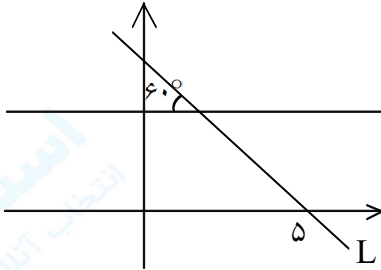


۲۸- اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  باشد،  $\text{tg}\alpha$  همواره عددی ..... است.

« پاسخ »

منفی

۲۹- با توجه به شکل زیر معادله‌ی خط  $L$  را به دست آورید.



$$m = \text{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 5)$$

$$y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$$

« پاسخ »

۳۰- اگر  $\text{Sin}\theta > 0$  و  $\text{tg}\theta < 0$  باشد، آن‌گاه انتهای کمان  $\theta$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

« پاسخ »

۱ نمره

سینوس در ناحیه‌های اول و دوم، مثبت و تانژانت در ناحیه‌ی دوم و چهارم، منفی می‌باشند، بنابراین اگر  $\theta$  در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد، آن‌گاه  $\text{Sin}\theta > 0$  و  $\text{tg}\theta < 0$

۳۱- نقطه‌ی P به طول  $\frac{1}{3}$  روی دایره‌ی مثلثاتی و در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی قرار دارد. اگر  $\theta$  زاویه‌ی بین نیم‌خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{Ox}$  باشد، حاصل  $\cos\theta + \tan^2\theta$  را به دست آورید.

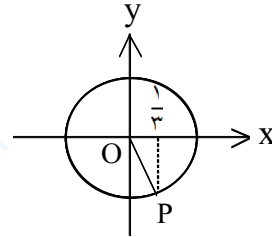
« پاسخ »

نمره ۱/۲۵

$P(x, y)$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y < 0$ .

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{y < 0} y &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\theta = x = \frac{1}{3}, \tan\theta = \frac{y}{x} = -2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \cos\theta + \tan^2\theta &= \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3} \end{aligned}$$



۳۲- معادله‌ی خطی که نقطه‌ای به مختصات  $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$  را قطع کند و با محور X ها زاویه ۴۵ درجه بسازد، کدام است؟

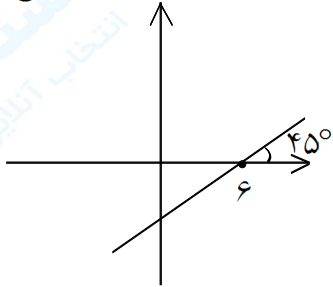
« پاسخ »

اطلاعات مسأله

$$\tan\theta = m$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 6)$$

$$y = x - 6$$

زاویه و نقطه موردنظر را در فرمول قرار می‌دهیم.

۳۳- اگر  $60^\circ \leq x < 90^\circ$  و  $\cos x = -2m - 1$  باشد، حدود  $m$  را بیابید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 60^\circ \leq x < 90^\circ &\xrightarrow{*} 0 < \cos x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < -2m - 1 \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 + 1 < -2m \leq \frac{1}{2} + 1 &\Rightarrow +1 < -2m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} > m \geq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

هرگاه طرفین یک نامساوی را بر عددی منفی تقسیم و یا در عددی منفی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

۳۴- در تمرین زیر  $\sin \theta$ ،  $\cos \theta$ ،  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  را بدست آورید، می‌دانیم که  $\theta$  زاویه‌ی شعاع  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{OX}$  است.  
 $P(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$

« پاسخ »

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



۳۵- با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب}) \qquad \frac{1}{\sin \theta} \times \text{tg} \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت}) \qquad \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \text{Cot} \alpha} = \text{tg} \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \text{tg} x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

« پاسخ »

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cancel{\sin \theta}} \times \frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\text{چپ} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cancel{\cos \theta} (1 - \sin \theta)}{\cancel{\cos \theta} \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\text{چپ} = \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \text{Cot} \alpha} = \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \frac{1}{\text{tg} \alpha}} = \frac{\text{tg} \alpha (1 + \text{tg} \alpha)}{\text{tg} \alpha + 1} = \text{tg} \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} \quad (\text{ت}) \\ &= 1 - 1 + \sin x = \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= \frac{1}{\cos x} - \text{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \quad (\text{ث}) \\ &= \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

۳۶- اگر  $\text{tg} 240^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی  $240^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \text{tg} \alpha \cos \alpha$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۷- اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

۳۸- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-2}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{2} = -\frac{4}{2}$$

۳۹- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

« پاسخ »

الف)  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$  تساوی صحیح نیست

ب)  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{6}{16}$

$\Rightarrow$  تساوی صحیح است

حال باید درستی آنرا در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}_1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

۴۰- در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت برحسب کسینوس یک زاویه و هم‌چنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

(۳) اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

$$3) \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

۴۱- اگر  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\operatorname{tg} \alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

در ربع سوم:  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

۴۲- اگر  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  و  $\theta$  در ربع سوم مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴۳- فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \theta}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{3}{5}, \operatorname{Cotg} \theta = \frac{4}{3}$$

۴۴- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ ، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{Cos} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{Sin}^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow \operatorname{Sin}^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{Sin} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{Cot} \alpha = 2$$

۴۵- ثابت کنید:

$$\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} + \frac{\operatorname{Cot} x - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{2}{\operatorname{Sin} x}$$

« پاسخ »

$$\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} + \frac{\operatorname{Cot} x - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{(1 + \operatorname{Sin} x) \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \left( \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cos} x \right)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{Sin} x) \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \left( \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cos} x \right)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} x + \cancel{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} + \operatorname{Cos} x - \cancel{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{2 \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{2}{\operatorname{Sin} x}$$

سمت چپ تساوی با سمت راست آن برابر شد، پس رابطه‌ی داده شده صحیح است.

۴۶- اتحاد مثلثاتی  $\frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cot} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x}$  را ثابت کنید.

« پاسخ »

۱/۲۵ نمره

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cot} x = \frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1 - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} \times \frac{1 + \operatorname{Cos} x}{1 + \operatorname{Cos} x} = \frac{1 - \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin} x (1 + \operatorname{Cos} x)}$$

$$= \frac{\cancel{\operatorname{Sin}^2 x}}{\cancel{\operatorname{Sin} x} (1 + \operatorname{Cos} x)} = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x}$$

۴۷- اتحاد مثلثاتی  $\frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \text{Sin}^2 \theta$  را ثابت کنید.

« پاسخ »

نمره ۰/۵

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \frac{1}{\text{Cos}^2 \theta} \Rightarrow \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \frac{\frac{\text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \text{Sin}^2 \theta$$

۴۸- اگر  $\text{Sin} 150^\circ = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $150^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »

نمره ۰/۷۵

$90^\circ < 150^\circ < 180^\circ \Rightarrow \theta = 150^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد

در ناحیه‌ی دوم  $\text{Sin} \theta$  مثبت و بقیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  منفی هستند، پس داریم:

$$\text{Cos} 150^\circ = -\sqrt{1 - \text{Sin}^2 150^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg} 150^\circ = \frac{\text{Sin} 150^\circ}{\text{Cos} 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{Cotg} 150^\circ = \frac{1}{\text{tg} 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

۴۹- درستی تساوی  $\frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = 2 \text{Cos}^2 \theta - 1$  را ثابت کنید.

« پاسخ »

نمره ۱/۲۵

$$\begin{aligned} \frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} &= \frac{1 - \frac{\text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \frac{\frac{\text{Cos}^2 \theta - \text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \text{Cos}^2 \theta - \text{Sin}^2 \theta \\ &= \text{Cos}^2 \theta - (1 - \text{Cos}^2 \theta) = 2 \text{Cos}^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

۵۰- درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف -  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{Cotg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

ب -  $\frac{\operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sin} \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta}$

« پاسخ »

۲ نمره

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{Cotg} \alpha} &= \frac{\frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} + \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}}{\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} + \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}}{\frac{\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{الف-} \\ \frac{\operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sin} \theta} \times \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{1 - \operatorname{Sin} \theta} &= \frac{\operatorname{Cos} \theta (1 - \operatorname{Sin} \theta)}{1 - \operatorname{Sin}^2 \theta} = \frac{\operatorname{Cos} \theta (1 - \operatorname{Sin} \theta)}{\operatorname{Cos}^2 \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta} \quad \text{ب-} \end{aligned}$$

۵۱- مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = ((\operatorname{Sin}^2(50^\circ) + \operatorname{Cos}^2(50^\circ)) + 2 \operatorname{tan}^2(45^\circ))$$

« پاسخ »

$$A = (\operatorname{Sin}^2(50^\circ) + \operatorname{Cos}^2(50^\circ) + 2 \operatorname{tan}^2(45^\circ)) = 1 + 2(1)^2 = 3 \quad (1)$$

۵۲- درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{2 \operatorname{tan} \theta}{1 + \operatorname{tan}^2 \theta} = 2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta$$

« پاسخ »

$$\frac{2 \operatorname{tan} \theta}{1 + \operatorname{tan}^2 \theta} = \frac{\frac{2 \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta}}{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta}} = \frac{2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Cos} \theta} = 2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta$$

۵۳- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\frac{2 \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2 \sin 90^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\cos^2 \theta (2 + \tan^2 \theta) = 2 - \sin^2 \theta \quad (\text{ب})$$

« پاسخ »

$$\frac{2 \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2 \sin 90^\circ \Rightarrow \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \cos^2 \theta (2 + \tan^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = 2(1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta = \\ &= 2 - 2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - \sin^2 \theta = \text{طرف دوم} \end{aligned}$$

۵۴- اگر  $\cot \alpha = m - 1$ ،  $\sin \alpha = \frac{1}{m+1}$  باشد مقدار عددی  $\cos \alpha$  را بیابید.

« پاسخ »

در رابطه‌ی  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  مقادیر  $\cot \alpha$ ،  $\sin \alpha$  را از فرض سؤال قرار می‌دهیم.

$$1 + (m - 1)^2 = (m + 1)^2 \Rightarrow 1 + m^2 - 2m + 1 = m^2 + 2m + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \text{ در ربع دوم است.}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

۵۵- اگر  $\cot \theta = 2$  باشد حاصل عددی عبارت  $\frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{5 \sin \theta - 4 \cos \theta}$  را بیابید.

« پاسخ »

$$\cot \theta = 2 \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \Rightarrow \cos \theta = 2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{5 \sin \theta - 4 \cos \theta} = \frac{3 \sin \theta + 2(2 \sin \theta)}{5 \sin \theta - 4(2 \sin \theta)} = \frac{7 \sin \theta}{-3 \sin \theta} = -\frac{7}{3}$$



۵۶- اگر  $\sin\theta + \cos\theta = a$  باشد، مطلوبست محاسبه‌ی عبارت مثلثاتی  $\sin\theta \cdot \cos\theta$  برحسب  $a$ .

« پاسخ »

$$\begin{aligned}\sin\theta + \cos\theta = a &\Rightarrow (\sin\theta + \cos\theta)^2 = a^2 \Rightarrow 1 + 2\sin\theta \cos\theta = a^2 \\ \Rightarrow 2\sin\theta \cos\theta = a^2 - 1 &\Rightarrow \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{a^2 - 1}{2}\end{aligned}$$