۱- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x - ۲}$

« **پاسخ** »

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x - ۲}$

الف) $f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = x^۲ - x - ۲ = (x - ۲)(x + ۱) = ۰ \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

در بازه‌های $(-\infty , -۱)$ و $(۲ , +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ نزولی

ب) $D = R - \{۲\}$

$$f'(x) = \frac{۱(x - ۲) - ۱(x)}{(x - ۲)^۲}$$

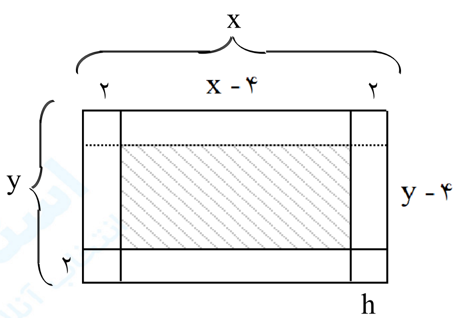
$$f'(x) = \frac{-۲}{(x - ۲)^۲} < ۰$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	-	-	
f	نزولی	۰	نزولی

در $R - \{۲\}$ یعنی در تمام نقاط دامنه نزولی می‌باشد.

۲- یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = ۱۰۰cm^۲$ و $h = ۲cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیش‌ترین مقدار ممکن شود.

« **پاسخ** »



$$\begin{cases} xy = ۱۰۰ \\ y = \dfrac{۱۰۰}{x} \end{cases}$$

$$V = ۲(x - ۴)(y - ۴) = ۲xy - ۸x - ۸y + ۳۲$$

$$V(x) = ۲۳۲ - ۸x - \frac{۸۰۰}{x}$$

$$V(x) = \frac{۲۳۲x - ۸x^۲ - ۸۰۰}{x}$$

$$V'(x) = \frac{\cancel{(۲۳۲ - ۱۶}x)(x) - ۱\left(\cancel{۲۳۲x} - ۸x^۲ - ۸۰۰\right)}{x^۲} \Rightarrow V'(x) = \frac{-۸x^۲ + ۸۰۰}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰$$

۳- ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^۳ + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

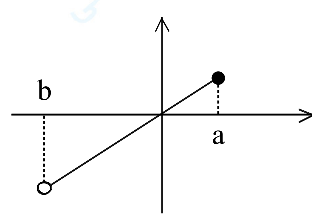
« **پاسخ** »

$$(۱ , ۲) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱ + a + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۱ \Rightarrow -۳ + b = ۱ \Rightarrow b = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + a \Rightarrow f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

۴- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع |f| ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

« **پاسخ** »



۵- اگر تابع $f(x) = ax^۲ + bx$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۲\alpha x + b \Rightarrow \underbrace{۰ = ۲\alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow b = -۲\alpha$$

$$f'(۱) = ۷ \Rightarrow \underbrace{۷ = \alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{\alpha = -۷ \, , \, b = ۱۴}_{۰/۲۵}$$

۶- الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا مشخص کنید.
ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه‌ی $(-۱ \, , \, ۳)$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

الف) تکمیل جدول نیم نمره

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} (۰/۵)$$

x		-۲		۱	
f'	+		-		+
		Max		Min	

ب)

$f(۱) = -۷$
$f(-۲) \notin [-۱ \, , \, ۳]$ $(۰/۲۵) \Rightarrow \min : (۱ \, , \, -۷)$ $(۰/۲۵)$, $\max : (۳ \, , \, ۴۵)$ $(۰/۲۵)$
$f(-۱) = ۱۳$
$f(۳) = ۴۵$

نقطه بحرانی: $(۱ \, , \, -۷)$ $(۰/۲۵)$

۷- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۴ - ۲x^۳ + ۲$ را در بازه $[-۲ \, , \, ۱]$ به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۴x^۲ - ۶x^۲ = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۰ \; ۰/۲۵ \; \text{ق ق} \, , \, x = \frac{۳}{۲} \; ۰/۲۵ \; \text{غ ق ق}$$

$f(۰) = ۲$ ۰/۲۵ , $f(۱) = ۱$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $f(-۲) = ۳۴$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۸- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = \sin^{۲} x + ۲\cos x$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \underbrace{۲\sin x \cos x - ۲\sin x = ۰}_{(۰/۵)} \to ۲\sin x(\cos x - ۱) = ۰$$

$\sin x = ۰ \to x = k\pi \to x = ۰ , \pi , ۲\pi \quad (۰/۲۵)$

$\cos x = ۱ \to x = ۲k\pi \quad x = ۰ , ۲x \quad (۰/۲۵)$

طول نقطه بحرانی: $x = \pi , x = ۰ , x = ۲\pi \quad (۰/۲۵)$

$f(۰) = f(۲\pi) = ۲ \to (۰ , ۲) , (۲\pi , ۲)$ نقاط ماکسیمم مطلق $(۰/۵)$

$f(\pi) = -۲ \to (\pi , -۲)$ نقطه مینیمم مطلق $(۰/۲۵)$

۹- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲} - ۱}$ را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$D_f = R \ (۰/۲۵) \quad , \ f'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۲]{(x^{۲} - ۱)^{۲}}} \ (۰/۵) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ (۰/۲۵) \\ f'(x) \ \text{ت.ن} \Rightarrow x = \pm ۱ \ (۰/۵) \end{cases} \Rightarrow \{۰, ۱ , -۱\}$$ نقاط بحرانی

۱۰- جهت تغییرات و مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱$ را در بازه‌ی $[-۲, ۳]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

$$y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۹x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۴ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

x	-۲		-۱		۳
y'		+	۰	−	
y	-۱	↗	$\frac{۱۵}{۲}$	↘	$-\frac{۹۷}{۲}$

مطلق $\max = \frac{۱۵}{۲}$

مطلق $\min = -\frac{۹۷}{۲}$

۱۱- مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ بیابید.

« **پاسخ** »

$D = R \quad y' = ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲$ ۰/۲۵ $۱۲x^۳ - ۲۴x^۲ = ۰$ ۰/۲۵

$\rightarrow ۱۲x^۲(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{۰/۲۵ غیر قابل قبول ۰/۲۵} \\ x = ۲ & \text{۰/۲۵} \end{cases}$

$f(۱) = -۵$ ۰/۲۵ $f(۲) = -۱۶$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $f(۳) = ۲۷$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۱۲- نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $y=x+\frac{۴}{x}$ را در بازه‌ی $[-۳,-۱]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x=۲ \text{ غ ق ق ۰/۲۵} \\ x=-۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f(-۳)=\frac{-۱۳}{۳} & \text{۰/۲۵} \\ f(-۲)=-۴ & \text{۰/۲۵} \\ f(-۱)=-۵ & \text{۰/۲۵} \end{cases}$

تابع در $x=-۲$ ماکسیمم مطلق ۰/۲۵ و در $x=-۱$ مینیمم مطلق دارد. ۰/۲۵

۱۳- طول نقاط ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ را درصورت وجود در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

تابع g در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ پیوسته است.

$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}} \Rightarrow g'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(-۱) = \sqrt{۳} \\ g(۰) = ۲ \\ g(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۰ \text{ طول ماکسیمم مطلق} \\ x = ۲ \text{ طول مینیمم مطلق} \end{matrix}$

۱۴- مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ می‌نیممی به مختصات $(۱,-۲)$ داشته باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد.

« **پاسخ** »

$(۰,۰) \in$ منحنی $\Rightarrow c = ۰$ ۰/۲۵

$(۱,-۲) \in$ منحنی $-۲ = ۱ + a + b \longrightarrow a + b = -۳$ ۰/۲۵

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow ۲a + b = -۳$ ۰/۵ , $\begin{cases} a + b = -۳ \\ ۲a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۰ , b = -۳$ ۰/۵

۱۵- مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه‌ی $A\Big|_{-۳}^{-۱}$ اکسترمم تابع $f(x) = ax^{۳} + bx$ باشد.

« **پاسخ** »

$$A\Big|_{-۳}^{-۱} \in \text{تابع} \Rightarrow -۳ = a(-۱)^{۳} + b(-۱) \Rightarrow -a - b = -۳ \quad ۰/۲۵$$

$$y' = ۳ax^{۲} + b \Rightarrow ۰ = ۳a(-۱)^{۲} + b \Rightarrow ۳a + b = ۰ \quad ۰/۲۵$$

$$\begin{cases} -a - b = -۳ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲a = -۳ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \quad b = \frac{۹}{۲} \quad ۰/۵$$

۱۶- تابع $y = x^{۲} + bx + ۳$ مفروض است. b را چنان بیابید که تابع، می‌نیممی برابر ۲ داشته باشد.

« **پاسخ** »

روش اول:

$$y = x^{۲} + bx + ۳$$

$$y = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a} = \frac{۱۲ - b^{۲}}{۴} = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

روش دوم:

$$y' = ۲x + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲}$$

$$\left(-\frac{b}{۲}, ۲\right) \Rightarrow ۲ = \left(-\frac{b}{۲}\right)^{۲} + b\left(-\frac{b}{۲}\right) + ۳ \Rightarrow b^{۲} = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲$$

۱۷- تابع $y = x^{۲} + ۲ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که $A(۲,۴)$ مینیمم تابع باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲x + ۲a \rightarrow ۰ = ۴ + ۲a \rightarrow a = -۲$$

$$۴ = ۴ + ۴a + b \rightarrow ۴a + b = ۰ \rightarrow -۸ + b = ۰ \rightarrow b = ۸$$

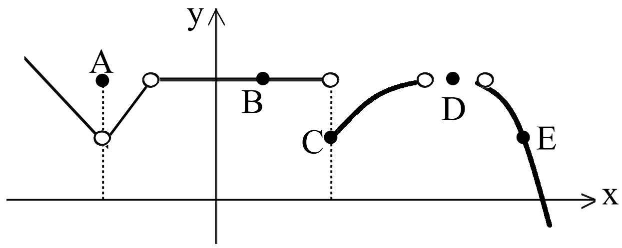
۱۸- تابع $y = x^{۳} + ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای مینیمم یا ماکزیممی برابر ۲- باشد.

« **پاسخ** »

$$(۱ , -۲) \xrightarrow{\text{در تابع}} -۲ = ۱ + a + b \Rightarrow a + b = -۳$$

$$y' = ۳x^{۲} + a = ۰ \Rightarrow ۰ = ۳(۱)^{۲} + a \Rightarrow a = -۳ \ , \ b = ۰$$

۱۹- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده در شکل، نقطه‌ی بحرانی نیست؟



« **پاسخ** »

نقطه E بحرانی نیست (۰/۲۵)

۲۰- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = |x - ۴| - |x + ۵|$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{x - ۴}{|x - ۴|} - \frac{x + ۵}{|x + ۵|} = \begin{cases} ۰ & x < -۵ \\ -۲ & -۵ < x < ۴ \\ ۰ & x > ۴ \end{cases}$$

پس f در فاصله‌ی $[-۵ , ۴]$ اکیداً نزولی است و در هیچ فاصله‌ای اکیداً صعودی نمی‌باشد.

۲۱- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = x^۳ - ۵x^۲ + ۳x - ۱۱$ روی آنها اکیدا صعودی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۰x + ۳ \qquad , f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۳ , x = \frac{۱}{۳}$$

x		$\frac{۱}{۳}$		۳	
y'	+		-		+
y	↗		↘		↗

پس f در فاصله‌های $(-\infty , \frac{۱}{۳}]$ و $[۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۲- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = ۲$ ماکسیمم نسبی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x < ۲ \\ a & x = ۲ \\ ۱ - x & x > ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

باید همسایگی حول نقطه‌ی $x = ۲$ وجود داشته باشد که عرض تمام نقاط این همسایگی از عرض $x = ۲$ کمتر باشد.

پس:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(x) \\ f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^{-}} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant -۱ \\ f(۲) \geqslant -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a \geqslant -۱$$

پس a باید در فاصله‌ی $[-۱ , +\infty)$ باشد.

۲۳- نقاطی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} - ۲x^۲ + ۴x - ۳$ در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲ \geqslant ۰$$

f پیوسته است و $f'(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد پس تابع f اکسترمم نسبی ندارد.

۲۴- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ از نقطه‌ی $(۲ , ۱)$ عبور کند و در نقطه‌ی $\left(\frac{۵}{۲} , \frac{۳}{۴}\right)$ می‌نیمم نسبی داشته باشد.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} ۴a + ۲b + c = ۱ \\ \frac{۲۵}{۴}a + \frac{۵}{۲}b + c = \frac{۳}{۴} \\ -\frac{b}{۲a} = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow a = ۱ , b = -۵ , c = ۷$$

۲۵- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\frac{1}{3}(a-1)x^3+2ax^2+4(a+2)x+2$ اکیدا صعودی است؟

« **پاسخ** »

$$f'(x)=(a-1)x^2+4ax+4(a+2)$$

همواره باید مثبت باشد پس: $f'(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\leqslant 0\\ \text{ضریب } x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}-16(a-2)\leqslant 0\\ a-1>0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 2$$

پس به ازای $a\in[2,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

۲۶- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$D_f=R$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\quad,\ f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	↘		↗

پس این تابع در فاصله‌ی $(-\infty,\frac{1}{2}]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[\frac{1}{2},+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۷- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۳x+۲}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x)=\frac{۶x^۲-۱۲}{(x^۲+۳x+۲)^۲}=\frac{۶(x^۲-۲)}{(x^۲+۳x+۲)^۲}$$

$f'(x)=۰ \Rightarrow x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$

مجانب های قائم : $x=-۱$ و $x=-۲$

x	$-\infty$	-۲		$-\sqrt{۲}$		-۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'	+	‖	+	۰	-	‖	-	۰	+	
y	↗	‖	↗		↘	‖	↘		↗	

پس این تابع در فاصله‌های $(-\infty , -۲)$, $(-۲ , -\sqrt{۲}]$, $[\sqrt{۲} , +\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله‌های $[-\sqrt{۲} , -۱)$, $(-۱ , \sqrt{۲}]$ اکیداً نزولی است.

۲۸- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x+۱۵$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲=۶(x-۱)(x+۲)$, $f'(x)=۰ \Rightarrow x=۱ , x=-۲$

x		-۲		۱	
y'	+	۰	-	۰	+
y	↗		↘		↗

پس f در بازه‌های $(-\infty , -۲]$ و $[۱ , +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[-۲ , ۱]$ اکیداً نزولی است.

۲۹- جهت تقعر نمودار f با ضابطه $f(x) = x^{۴} - ۴x^{۳}$ را در دامنه‌اش مشخص کنید و نقاط عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x^{۲}$ ۰/۲۵

$f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۲۴x$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f''(x) = ۰} ۱۲x(x-۲) = ۰ \rightarrow x = ۰ , x = ۲$ ۰/۲۵

x	-∞		۰		۲		+∞
علامت f''(x)		+	۰	−	۰	+	
جهت تقعر f		رو به بالا		رو به پایین		رو به بالا	

۰/۵

نقاط عطف: (۰,۰) , (۲,-۱۶) ۰/۲۵

۳۰- جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۴}-۴x^{۳}$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را بیابید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x^{۲}$ ۰/۲۵ $f''(x)=۱۲x^{۲}-۲۴x$ ۰/۲۵ $=۱۲x(x-۲)$

$۱۲x(x-۲)=۰ \rightarrow x=۰$ ۰/۲۵ , $x=۲$ ۰/۲۵

x	-∞		۰		۲		+∞
f''		+	۰	-	۰	+	
f		∪	۰ عطف	∩	-۱۶ عطف	∪	

۰/۵

نقاط عطف: (۰ و ۰) و (۲ و ۱۶-) ۰/۵

۳۱- به ازای چه مقداری برای a نقطه‌ای به طول ۱ نقطه‌ی عطف منحنی $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + x^{۳} + ۳ax^{۲}$ می‌باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۶ax$ ۰/۵ , $f''(x) = ۳x^{۲} + ۶x + ۶a$ ۰/۵ $\Rightarrow ۹ + ۶a = ۰$ ۰/۲۵

$\Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$ ۰/۲۵

۳۲- مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) ، نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=ax^{۳}+۳bx^{۲}-c$ بوده و نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند.

« **پاسخ** »

$f(۰)=۴ \Rightarrow C=-۴$ ۰/۲۵

$f'(x)=۳ax^{۲}+۶bx$ ۰/۲۵ , $f''(x)=۶ax+۶b$ ۰/۲۵

$f''(۱)=۰ \Rightarrow a+b=۰$ ۰/۲۵ , $f(۱)=۲ \Rightarrow a+۳b=-۲$ ۰/۲۵

$\begin{cases} a+b=۰ \\ a+۳b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱$ ۰/۲۵ , $b=-۱$ ۰/۲۵

۳۳- تابع $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ مفروض است c,b,a را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱ , -۱) اکسترمم منحنی و طول نقطه‌ی عطف آن ۲ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} + ۲ax + b \qquad y'' = ۶x + ۲a$

اکسترمم $(۱, -۱) \rightarrow \begin{cases} -۱ = ۱ + a + b + c \\ ۰ = ۳ + ۲a + b \end{cases}$

طول نقطه ی عطف $x = ۲ \rightarrow ۰ = ۱۲ + ۲a \rightarrow a = -۶$

$۳ + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۳ - ۱۲ + b = ۰ \rightarrow b = ۹$

$-۲ = a + b + c \rightarrow -۲ = -۶ + ۹ + c \rightarrow c = -۵$

۳۴- مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^{۳}+bx^{۲}+۴$ باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx$ ۰/۲۵ , $f''(x) = ۶ax + ۲b$ ۰/۲۵ , $f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a+b = ۰$ ۰/۲۵

$f(۱) = ۲ \Rightarrow a+b = -۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow a = ۱$ ۰/۲۵ , $b = -۳$ ۰/۲۵

۳۵- m را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی به طول $x = ۲$ نقطه‌ی عطف $y = x^{۳} - mx^{۲} + ۲x$ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۲mx + ۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y'' = ۶x - ۲m$ ۰/۲۵

$f'(۲) = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۶(۲) - ۲m = ۰ \Rightarrow m = ۶$ ۰/۲۵

۳۶- به ازای چه مقادیری از a و b نقطه‌ی (۱,۲) مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = ax^{۳} + bx^{۲}$ است؟

« **پاسخ** »

در توابع درجه سوم، مرکز تقارن همان نقطه‌ی عطف است.

$(۱,۲) \Rightarrow ۲ = a + b$

$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx \Rightarrow y'' = ۶ax + ۲b \Rightarrow ۰ = ۶a + ۲b \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ , b = ۳$

۳۷- معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۳ \qquad m_{\text{مماس}} = -۳ \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{۱}{۳}$

$y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$

$y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱$

۳۸- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $y = -۲x^{۳} + ۶x^{۲} + ۱$ را در صورت وجود تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$y' = -۶x^{۲} + ۱۲x$

$y'' = -۱۲x + ۱۲ \xrightarrow{y''=۰} x = ۱ \Rightarrow y = ۵ \ (۱,۵)$ نقطه عطف

x	$-\infty$		۱		$-\infty$
علامت y''		+	۰	—	
جهت تقعر y		تقعر بالا $\cup$	۵	تقعر پایین $\cap$	

۳۹- نقاط عطف توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x) = (x - ۲)^{۴} + ۴x + ۴$ ب) $f(x) = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

« **پاسخ** »

الف) $f'(x) = ۴(x - ۲)^{۳} + ۴ \rightarrow f''(x) = ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f'' تغییر علامت نمی‌دهد پس f عطف ندارد

ب) $f'(x) = ۴x^{۳} - ۲۴x^{۲} + ۴۸x \rightarrow f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۴۸x + ۴۸ = ۱۲\left(x^{۲} - ۴x + ۴\right)$

$= ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f عطف ندارد

۴۰- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۴$ را در نقطه عطف آن به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x$$
$$f''(x) = ۶x + ۶ \Rightarrow f''(x) = ۰ \Rightarrow x = -۱$$
$$f(-۱) = (-۱)^{۳} + ۳(-۱)^{۲} + ۴ = ۶ \qquad A(-۱\,,\,۶)$$
$$m = f'(-۱) = ۳(-۱)^{۲} + ۶(-۱) = -۳$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$
$$y - ۶ = -۳(x + ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۳$$

۴۱- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲}$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} + ۶x \to y'' = ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \to y = ۲ \to (-۱,۲) \text{ نقطه عطف}$$
$$m = -۳ \Rightarrow y - ۲ = -۳(x + ۱) \to y = -۳x - ۱$$

۴۲- نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۲\sqrt{۲}(\text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x)$ را در بازه‌ی $[۰\,,\,۲\pi]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲x + ۲\sqrt{۲}(\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x) \to y'' = ۲ + ۲\sqrt{۲}(-\text{Sin}\,x - \text{Cos}\,x) = ۰$$
$$\text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \sqrt{۲}\,\text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲} \to x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ و } ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$
$$\to x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \text{ و } x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$$

۴۳- معادله‌های خط مماس و قائم بر نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۹x^{۲} + ۲۴x - ۷$ در نقطه‌ی عطف آن به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} - ۱۸x + ۲۴ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ - ۵۴ + ۲۴ = -۳ \Rightarrow \text{مماس} : y - ۱۱ = -۳(x - ۳)$$
$$y'' = ۶x - ۱۸ \Rightarrow x = ۳ \text{ عطف } (۳\,,۱۱) \qquad \Rightarrow y = -۳x + ۲۰$$
$$\text{قائم} : y - ۱۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱۰$$

۴۴- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تغییرات تابع مقابل را در صورت وجود تعیین کنید. $y = x^{۲} + ۵x + ۴$

« **پاسخ** »

$y' = ۲x + b$
$y'' = ۲ > ۰$
نقطه عطف ندارد $\Rightarrow$ همواره تقعر به طرف بالاست.

۴۵- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

پ) $f(x) = -x(x+۲)^{۲}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ت) $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲}$

« **پاسخ** »

پ) $f(x) = -x(x+۲)^{۲} \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$f'(x) = -۱(x+۲)^{۲} + ۲(x+۲)(-x) = ۰$

$(x+۲)(-x-۲-۲x) = ۰$

$(x+۲)(-۳x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$

$f''(x) = ۱(-۳x-۲) + (-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow f''(x) = -۳x-۲-۳x-۶$

$\Rightarrow -۶x-۸ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$+\infty$
f'	-	+	+	-	
f''	+	+	-	-	
f	↘	↗	↗	↘	
		۰		۰	

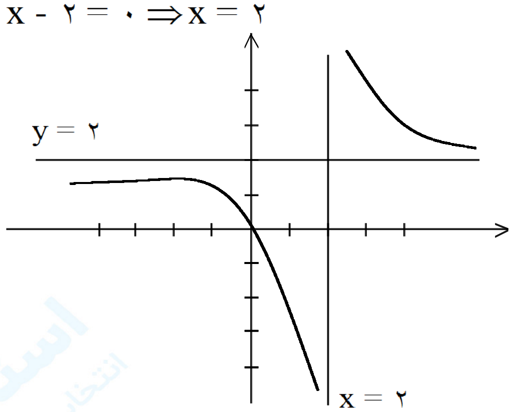
ت) $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲} \Rightarrow D = R - \{۲\}$

۱) $\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \pm\infty & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x-۱}{x-۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

۲) $f'(x) = \frac{۲(x-۲)-(۲x-۱)}{(x-۲)^{۲}} = \frac{-۳}{(x-۲)^{۲}} < ۰$

۳) $f''(x) = \frac{۰ + ۶(x-۲)}{(x-۲)^{۴}} = \frac{+۶}{(x-۲)^{۳}}$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$



x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
f'	-	-	-	
f''	-	-	+	
f	۲ ↘	$-\infty$ ↘	$+\infty$ ↘ ۲	
		۰ کمکی		

از نقاط کمکی دیگری می‌توان استفاده کرد.

۴۶- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$ ب) $f(x) = x^۳ - ۵x + ۵$

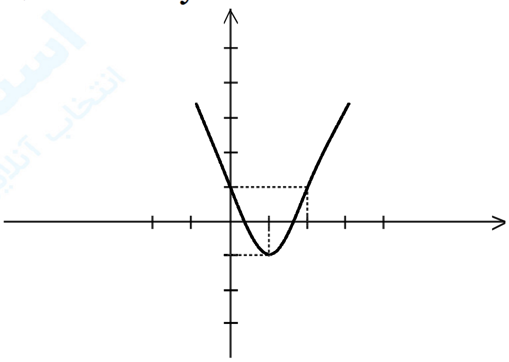
« **پاسخ** »

الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱ \Rightarrow D = R$

۱) $f'(x) = ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۰$

۲) $f''(x) = ۴ > ۰$

۳) $x = ۰ \Rightarrow y = ۱$



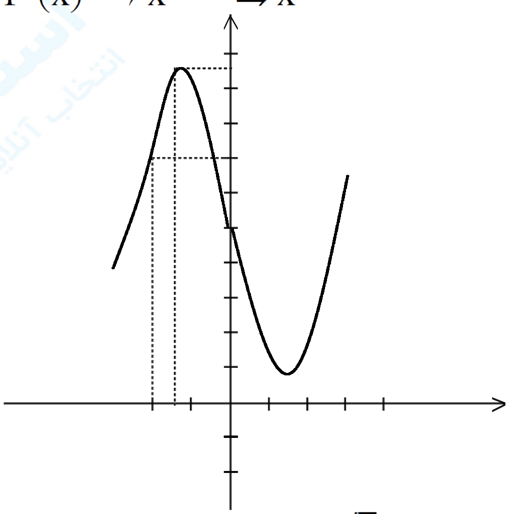
کمکی

x	-∞	۰	۱	۲
f'	-	-	+	
f''	+	+	+	
f	↘	↘	↗	
		۱	-۱	

ب) $f(x) = x^۳ - ۵x + ۵ \Rightarrow D_f = R$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۵ = ۰ \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \\ x = -\sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \end{cases}$$

$f''(x) = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$



x	-∞	-۲	$-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$	۰	$\sqrt{\frac{۵}{۳}}$	۲	+∞
f'	+	+	-	-	+	+	
f''	-	-	-	+	+	+	
f	↗	↗	↘	↘	↗	↗	
		۷	۹/۳	۵	۰/۷	۳	

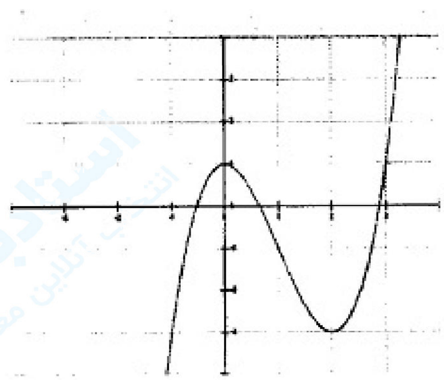
۴۷- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$D_f = R\ ,\ f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \xrightarrow{0/25} x = 0,2$ ۰/۲۵

$f'(x) = 6x - 6 = 0 \xrightarrow{0/25} x = 1$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۱	↘	−۱	↘	−۳	↗	$+\infty$



۰/۵ ۰/۵

۴۸- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کنید.

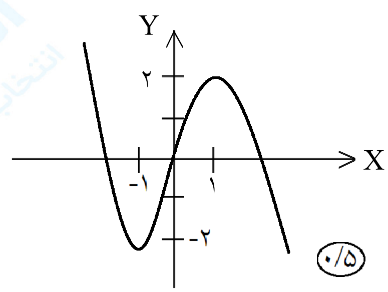
« پاسخ »

$f'(x) = -3x^2 + 3$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f' = 0} x = \pm 1$ ۰/۲۵

$f''(x) = -6x$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f'' = 0} x = 0$ ۰/۲۵

X	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
f'		−	۰		+		۰	−	
f''			+		۰		−		
f	$+\infty$	↘	−۲	↗	۰	↗	۲	↘	$-\infty$
			مینیمم		عطف		ماکسیمم		

۰/۵



۰/۵

۴۹- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۹x$ را رسم کنید.

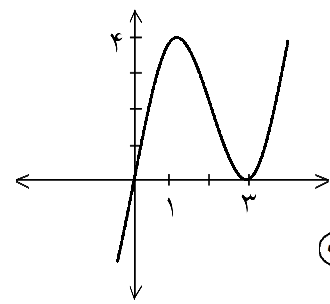
« **پاسخ** »

$D = R \ , \ y' = ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ \rightarrow ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ = ۰$ ۰/۲۵ $\rightarrow \begin{cases} x = ۱ & ۰/۲۵ \\ x = ۳ & ۰/۲۵ \end{cases}$

$y'' = ۶x - ۱۲ \rightarrow ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	-		-	۰	+	
y''		-		-	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗	$+\infty$
			ماکسیمم		عطف		مینیمم		

۰/۵



۰/۵

۵۰- نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x$ را به کمک جدول تغییرات رسم کنید.

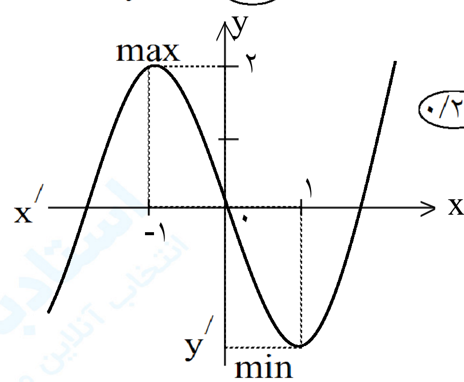
« **پاسخ** »

$D = R$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow y \longrightarrow \pm\infty$ ۰/۲۵ $, \ y' = ۳x^{۲} - ۳ \Rightarrow ۳x^{۲} - ۳ = ۰$

$x = ۱$ ۰/۲۵ $x = -۱$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y''$ ۰/۲۵ $= ۶x \Rightarrow x = ۰ \ , \ y = ۰$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+		—		—		+	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	$+\infty$
			max				min		

۰/۲۵ ۰/۲۵



رسم ۰/۲۵

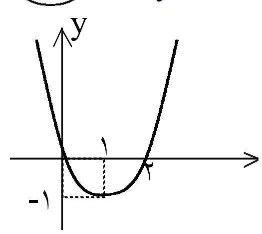
۵۱- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$y = x^{۲} - ۲x \Rightarrow y' = ۲x - ۲ = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x = ۱$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y = ۱ - ۲ = -۱$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		—		+	
y	$+\infty$	↘	-۱	↗	$-\infty$

جدول تغییرات ۰/۷۵



رسم ۰/۵

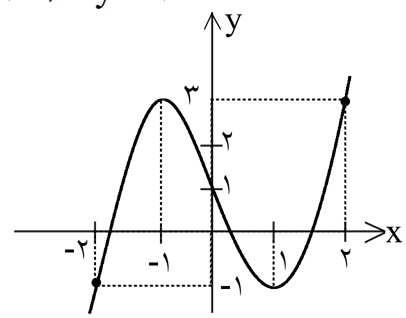
۵۲- جهت تغییرات و نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} - ۳ \rightarrow y' = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = -۱ \\ x = -۱ \rightarrow y = ۳ \end{cases}$$

$y'' = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$ و $y = ۱$ $(۰,۱)$ نقطه عطف

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'			+		۰		−		۰		+		
y''	$-\infty$	↗	-۱	↗	۳ max	↘	۱	↘	-۱ min	↗	۳	↗	$+\infty$



۵۳- ضرایب a و b را چنان بیابید که مرکز تقارن توابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + a$ و $y = \frac{-۲x + ۱}{x + b}$ بر هم منطبق باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} - ۶x \Rightarrow y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = a - ۲ \Rightarrow$$

نقطه عطف یا مرکز تقارن $= (۱, a - ۲)$

$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = -۲ \\ y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x = -b \end{cases} \rightarrow$ مرکز تقارن $= (-b , -۲) \Rightarrow b = -۱$ و $a = ۰$

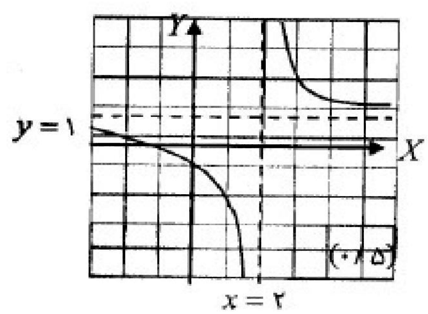
۵۴- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$x = ۲$ $(۰/۲۵)$ م . قائم

$y = ۱$ $(۰/۲۵)$ م . افقی $y' = \frac{-۳}{(x - ۲)^{۲}}$ $(۰/۲۵)$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		−	||	−	
y	۱	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	۱



۵۵- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

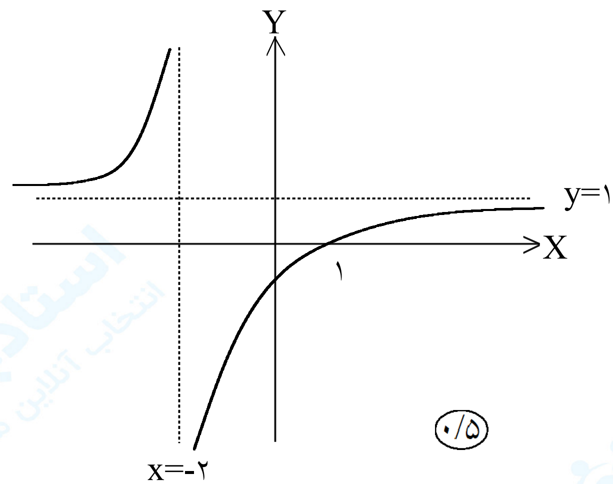
$x=-۲$ مجانب قائم ۰/۲۵ , $y=۱$ مجانب افقی ۰/۲۵

$f'(x)=\frac{۳}{(x+۲)^۲}, x\neq -۲$ ۰/۲۵

$f''(x)=\frac{-۶}{(x+۲)^۳}, x\neq -۲$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		-۲		۱	$+\infty$
f'		+	⋮		+	
f''		+	⋮		-	
f	۱ ↗	$+\infty$	⋮	$-\infty$ ↗	۰ ↗	۱

۰/۵



۰/۵

۵۶- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$ از نقطه‌ی $(۱ , ۳)$ عبور کند و مجانب‌های آن یکدیگر را در نقطه‌ی $\left(\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}\right)$ قطع کنند.

« **پاسخ** »

$$f(۱)=۳ \Rightarrow \frac{a+۱}{b+c}=۳$$

محل برخورد مجانب ها $\left(\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{b}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{b}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=۲ \end{cases} \quad c=-۱$

$$\Rightarrow a=۲$$

پس $a=۲$, $b=۲$, $c=-۱$ هستند.