

استادبانک



نمونه سوالات همراه با جواب و

گام به گام کتاب‌های درسی

به طور کامل رایگان در

اپلیکیشن استادبانک

به جمع ده‌ها هزار کاربر اپلیکیشن رایگان استادبانک پیوندید.

[لینک دریافت اپلیکیشن نمونه سوالات استادبانک \(کلیک کنید\)](#)

* برای مشاهده نمونه سوالات دانلود شده به صفحه بعد مراجعه کنید.

۱- وارون تابع $f(x) = \frac{x}{3x-2}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$y = \frac{x}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x \Rightarrow x(3y-1) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{3y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x}{3x-1}$$

۲- اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آنرا به دست آورید.

« پاسخ »

ابتدا ضابطه خطی تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \\ (4, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{5-1}{4-2}(x-2) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

۳- اگر $f(x) = 35 - 7x$ باشد، دامنه $f^{-1}(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 35 - 7x \Rightarrow y = 35 - 7x \Rightarrow 7x = 35 - y \Rightarrow x = \frac{35-y}{7} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{35-x}{7}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{35-x}{7}$$

$$h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{35-x}{7}} \Rightarrow h(x) = \frac{7}{35-x} \Rightarrow 35-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 35$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{35\}$$

۴- اگر $f = \{(2, m^2 + 3m), (5, 10), (2, 4), (5m, 11), (-4, 5)\}$ تابعی یک به یک و $g(x) = \left[\frac{7x}{3} \right]$ باشد، مقدار $(f+g)(m)$ را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است).

« پاسخ »

$$m^2 + 3m = 4 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{ق ق} \\ m = -4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m = -4} f = \{(2, 4), (5, 10), (2, 4), (-20, 11), (-4, 5)\}$$

$$(f+g)(m) \xrightarrow{m = -4} f(-4) + g(-4) = 5 + \left[\frac{-28}{3} \right] = 5 - 10 = -5$$

۵- اگر $f(x) + f^{-1}(x) = 2x + 10$ باشد، مقدار $\frac{1 + f(1)}{2 - f^{-1}(0)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(x, f^{-1}(x)) \in f^{-1} \Rightarrow (f^{-1}(x), x) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(x) \\ f(x) = x \end{cases} \Rightarrow x + f^{-1}(x) = 2f^{-1}(x) + 10$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -4$$

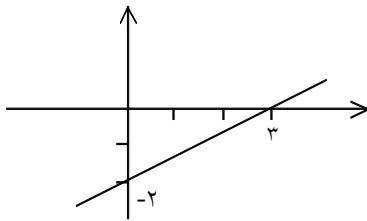
$$f(x) - 4 = 2x + 10 \Rightarrow f(x) = 2x + 14$$

$$f(1) = 2 + 14 = 16$$

$$f^{-1}(0) = a \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow 2a + 14 = 0 \Rightarrow a = -7$$

$$\frac{1 + f(1)}{2 - f^{-1}(0)} = \frac{1 + 16}{2 + 7} = \frac{17}{9}$$

۶- اگر نمودار تابع خطی f به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{1 + f^{-1}(1)}{1 - f(-1)}$ را حساب کنید.



« پاسخ »

$$A(3, 0) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$B(0, -2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}(-1) - 2 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$$

$$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a - 2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1 + f^{-1}(1)}{1 - f(-1)} = \frac{1 + \frac{9}{2}}{1 - \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{3}} = \frac{33}{14}$$

۷- اگر $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = x - 7$ باشد، دامنه‌ی $h(x) = \frac{x+1}{f^{-1}(x) \times g^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-5}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$g(x) = x - 7 \Rightarrow y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} g^{-1}(x) = x + 7$$

$$h(x) = \frac{x+1}{\left(\frac{x-5}{2}\right)(x+7)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \\ x+7 \neq 0 \Rightarrow x \neq -7 \end{cases} \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{5, -7\}$$

۸- اگر f یک تابع خطی باشد و $f(1) = 3$ و $f(4) = 9$ باشد معادله‌ی $f^{-1}(x) = f(x)$ را حل کنید.

« پاسخ »

چون تابع $f(x)$ خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن $f(x) = ax + b$ است.

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$f(4) = 9 \Rightarrow 4a + b = 9 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y-1}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2x + 1 \Rightarrow 4x + 2 = x - 1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

۹- ضابطه و دامنه‌ی وارون $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 36}{x - 9}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{9\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(x-9)} = x - 4$$

تابع در $(5, 9)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(5, 9)$ تعریف نشده است.

$$y = x - 4 \Rightarrow y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x + 4$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{5\}$$

۱۰- اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد و دامنه‌ی دو تابع $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ و $h(x) = \frac{x+7}{x^2+ax+b}$ برابر باشند، a, b را

حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

به توان ۲ می‌رسانیم $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

۱۱- اگر $f(x) + f(1) = 5x + 7$ باشد وارون تابع f را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} x = 1 &\xrightarrow{\quad} f(1) + f(1) = 12 \Rightarrow 2f(1) = 12 \Rightarrow f(1) = 6 \Rightarrow f(x) + 6 = 5x + 7 \\ &\Rightarrow f(x) = 5x + 1 \end{aligned}$$

$$y = 5x + 1 \Rightarrow y - 1 = 5x \xrightarrow{\div 5} \frac{y-1}{5} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-1}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$$

۱۲- وارون تابع $f(x) = \frac{2x+3}{5x+8}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} y = \frac{2x+3}{5x+8} &\Rightarrow 5xy + 8y = 2x + 3 \Rightarrow x(5y-2) = 3-8y \Rightarrow x = \frac{3-8y}{5y-2} \\ &\Rightarrow y^{-1} = \frac{3-8x}{5x-2} \end{aligned}$$

۱۳- اگر $f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, -1), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

۱۴- اگر f یک تابع خطی باشد و $f(x-1) + f(x+2) = 4x + 8$ مقدار $f^{-1}(5)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

چون f یک تابع خطی است. بنابراین:

$$f(x) = ax + b$$

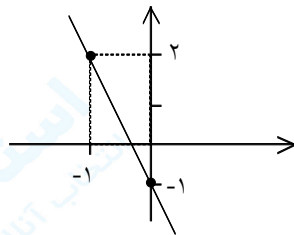
$$f(x-1) + f(x+2) = 4x + 8 \Rightarrow a(x-1) + b + a(x+2) + b = 4x + 8$$

$$\Rightarrow 2ax + a + 2b = 4x + 8 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 2 + 2b = 8 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(5) = k \Rightarrow f(k) = 5 \Rightarrow 2k + 3 = 5 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f^{-1}(5) = 1$$

۱۵- وارون تابع خطی زیر را حساب کنید.



« پاسخ »

f یک تابع خطی است و $f(x) = ax + b$ بنابراین:

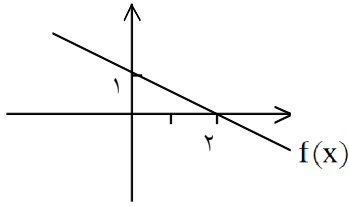
$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(-1, 2) \Rightarrow a(-1) - 1 = 2 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = -3x - 1 \Rightarrow y = -3x - 1 \Rightarrow y + 1 = -3x \xrightarrow{\div(-3)} \frac{y+1}{-3} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+1}{-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-3}$$

۱۶- با توجه به نمودار تابع خطی $f(x)$ ضابطه‌ی معکوس آن را بنویسید.



« پاسخ »

چون $f(x)$ یک تابع خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(2, 0) \Rightarrow a(2) + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times(-2)} -2y + 2 = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -2x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$$

۱۷- اگر $f(x) = 5 - 2x$ ، $[f^{-1}(10)]$ را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

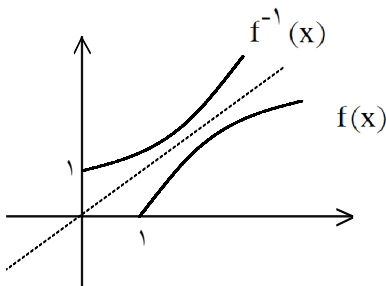
« پاسخ »

$$y = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5 - y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{5 - x}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5 - x}{2} \Rightarrow [f^{-1}(10)] = [-2/5] = -3$$

۱۸- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - 1}$ و وارونش را رسم کنید و سپس دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

« پاسخ »



$$\begin{aligned} D_f &= [1, +\infty) \\ R_f &= [0, +\infty) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [1, +\infty) \end{cases}$$

۱۹- اگر تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + 3x + 2a - 1$ در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد، $f(5)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

برای آن که تابع در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد باید درجه ۲ نباشد بنابراین ضریب x^2 را صفر قرار می‌دهیم.
 $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f(5) = 15 + 1 = 16$

۲۰- یک به یک بودن تابع $y = (x + 2)^3 - 2$ را بررسی کرده و وارون آن را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1 + 2)^3 - 2 = (x_2 + 2)^3 - 2 \quad (0/25)$$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (0/25) \text{ تابع یک به یک است}$$

$$\Rightarrow y = (x + 2)^3 - 2 \Rightarrow y + 2 = (x + 2)^3 \quad (0/25) \Rightarrow x = \sqrt[3]{y + 2} - 2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \text{تابع وارون} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2} - 2 \quad (0/25)$$

۲۱- نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ یک به یک است، سپس ضابطه تابع معکوس آن را بنویسید.

« پاسخ »

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), R_f = [0, +\infty)$$

$$\sqrt{2x_1 - 1} = \sqrt{2x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است و بنابراین معکوس پذیر است.

$$y = \sqrt{2x - 1} \Rightarrow y^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}, x \geq 0$$

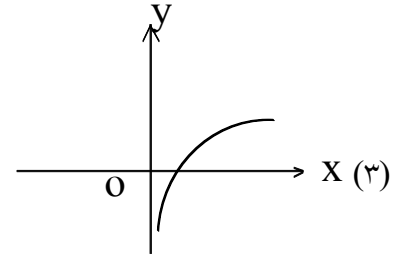
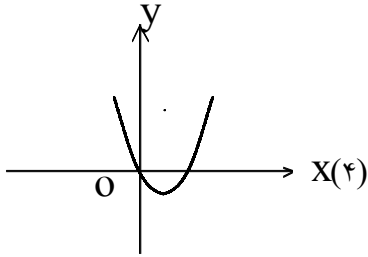
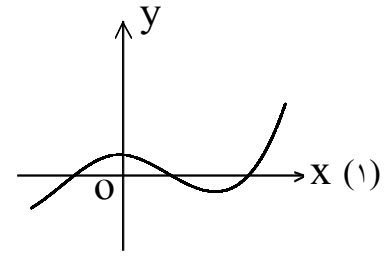
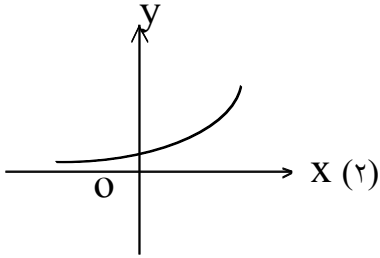
۲۲- ثابت کنید تابع $f(x) = (1 - 2x)^3$ یک به یک است، سپس ضابطه تابع معکوس را بنویسید.

« پاسخ »

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (1 - 2x_1)^3 = (1 - 2x_2)^3 \Rightarrow 1 - 2x_1 = 1 - 2x_2 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ یک به یک است}$$

$$y = (1 - 2x)^3 \Rightarrow 1 - 2x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt[3]{y}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{2}$$

۲۳- کدام یک از نمودارهای زیر در دامنه‌ی خود نمودار یک تابع یک به یک است؟



« پاسخ »

نمودارهای (۱) و (۴) یک به یک نیستند، زیرا می‌توان خطی افقی رسم کرد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

نمودارهای (۲) و (۳) یک به یک می‌باشند، زیرا هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

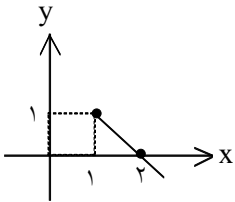
۲۴- وارون‌پذیری تابع $f(x) = -|x - 1| + 1$ را با شرط $x \geq 1$ بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیر بودن، دامنه و ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید.

« پاسخ »

چون $x \geq 1$ است، پس حاصل $(x - 1)$ نامنفی بوده و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$f(x) = -(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

با رسم نمودار، معلوم می‌شود که تابع f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.



$$y = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - x$$

ضمناً از روی نمودار متوجه می‌شوید که برد آن $[-\infty, 1]$ است، پس دامنه‌ی f^{-1} هم برابر همین بازه است.

مجموعه سوالات استادبانک

۲۵- وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

« پاسخ »

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$$2y - 6 = -x \Rightarrow x = 6 - 2y \Rightarrow f^{-1}(y) = 6 - 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = 6 - 2x$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 6 & 4 \end{array}$$